国家教材委员会专家委员会审核通过 2019

普通高中教科书

数学

SHUXUE

选择性必修

第二册

湖北教育出版社

普通高中教科书

数学

选择性必修

第二册

湖北教育出版社

ISBN 978-7-5564-3145-8

9 787556 431458 >

普 通 高 中 教 科 书

数 学

SHUXUE

选择性必修

第二册

主　编　彭双阶

湖北教育出版社

主　　编：彭双阶

副 主 编：徐胜林　胡典顺　郭熙汉

本册主编：徐胜林

主要编者：陈贤才　张卫兵　丁明忠　岑爱国　徐胜林

胡典顺　郭熙汉

shuxue

致高中生

高中数学是一门非常重要的课程. 数学以其卓越的智力成就被人们尊称为“科学的皇后”. 数学是人类最高超的智慧活动，是人类心灵最独特的创造，是形成人类文化的主要力量，是人类文明的核心部分，是认识世界和创造世界的一把关键钥匙.

我们需要数学，因为作为人类文明发展标志的数学，是人类文化的重要组成部分. 数学既是一种睿智的文化、一种思想的体操，更是现代科技进步中理性文化的核心.

我们需要数学，因为数学在形成人类理性思维和促进个人智力发展的过程中发挥着独特的、不可替代的作用. 数学素养是现代社会公民应该具备的一种必备品格.

我们需要数学，因为数学是刻画自然规律和社会现象的特殊语言和有力工具，是自然科学、技术科学的基础，在经济科学、社会科学、人文科学的发展中发挥越来越强大的作用.

我们需要数学，因为数学已经渗透到现代社会和人们日常生活的各个方面. 学好数学是提升生活质量、优化生活品质的重要保证.

本套教科书以《普通高中数学课程标准（2017 年版）》为依据来编写，遵循了现代数学教与学的规律，着眼于 21 世纪现代生活和未来发展，力求提升同学们的数学核心素养，更快地适应未来社会的发展.

教科书是教与学的一种重要资源. 在使用本套教科书的同时，我们还应该多关注现实生活，关注社会进步和科技发展，用数学眼光观察世界，用数学思维思考世界，用数学语言表达世界. 现代社会是信息社会，又是终身学习的社会. 在这个大数据时代，我们可以根据实际条件，选择利用计算机与互联网，丰富学习资源，提高学习效率. 积极参与数学活动，勤于思考，敢于质疑，乐于合作交流，克难奋进，砥砺前行，养成良好的数学学习习惯，让数学学习变得更加生动活泼、富有情趣.

亲爱的同学们，插上快乐的翅膀，带着青春的梦想，在浩瀚的数学海洋扬帆奋进吧！

Mulu

目 录

第1章 数 列

1.1 数列的概念 …… 4
1.2 等差数列 …… 9
1.3 等差数列的前 n 项和 …… 12
阅读与讨论：有关储蓄的计算 …… 17
1.4 等比数列 …… 19
1.5 等比数列的前 n 项和 …… 23
1.6 *数学归纳法 …… 27
阅读与讨论：斐波那契数列 …… 32
复习题 …… 34
思考与实践 …… 35

Mulu

目 录

第 2 章 一元函数导数及其应用

2.1 导数的概念及其意义 …… 38

阅读与讨论：导数漫谈 …… 46

2.2 导数的运算 …… 49

2.3 导数在研究函数中的应用 …… 60

阅读与讨论：哪个模型更合理 …… 70

复习题 …… 72

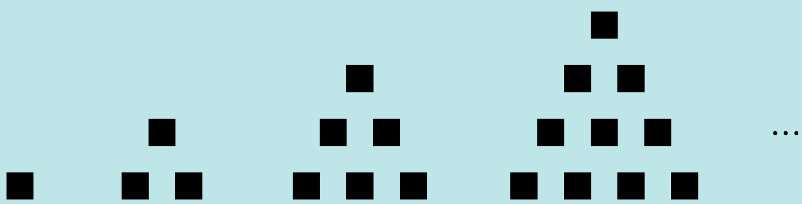
思考与实践 …… 73

第1章 数 列

1.1 数列的概念
1.2 等差数列
1.3 等差数列的前 n 项和
阅读与讨论：有关储蓄的计算
1.4 等比数列
1.5 等比数列的前 n 项和
1.6 *数学归纳法
阅读与讨论：斐波那契数列
复习题
思考与实践

传说古希腊毕达哥拉斯(Pythagoras，约公元前570年—公元前500年)学派的数学家经常在沙滩上研究数学问题，他们在沙滩上画点或用小石子来表示数. 比如，他们将石子摆成如图所示的三角形形状，将其所对应石子的个数称为三角形数，这些数为

1，3，6，10，15，21，28，36，45，55，66，78，91，⋯.



像这样按照一定的顺序排列的一列数叫作数列.

数列是刻画现实世界的一种数学模型. 在日常生活和生产中，为了便于了解事物的变化规律，人们可以利用实际问题的数量特征得到数列. 通过对数列中数据之间的相互关系、数据的变化趋势等问题进行研究，可以认识事物的一些本质属性.

在本章，我们将学习数列的概念、等差数列、等比数列以及数学归纳法等知识，并用它们解决一些简单的实际问题.

1.1 数列的概念

我们来看下面的例子.

(1) 全体自然数可依次排列为

$$0, 1, 2, 3, 4, \cdots. \quad ①$$

(2) 2008～2017 年某市普通中学在校学生人数(单位：万人)依次为

$$45, 41, 38, 35, 33, 31, 31, 30, 31, 32. \quad ②$$

图 1-1

(3) 图 1-1 所示的三角形称为谢宾斯基(Sierpinski)三角形，每个大三角形中着色三角形的个数排列成一列数

$$1, 3, 9, 27, \cdots. \quad ③$$

(4) 为了研究自由落体运动的规律，人们让球体从足够高度自由落下，经过 1 秒、2 秒、3 秒、4 秒、5 秒，测得球体下落的距离(单位：m)依次为

$$4.9, 19.6, 44.1, 78.4, 122.5. \quad ④$$

(5)“一尺之棰，日取其半，万世不竭”的意思为：一尺长的木棒，每日截取一半，永远也截取不完. 如果将“一尺之棰”的长度记为 1，那么每日剩下部分的长度依次为

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \cdots. \quad ⑤$$

上面的例子表明，人们常常将一列数据作为研究对象.

按照一定顺序排列的一列数称为**数列**(sequence of number)，数列中的每一个数叫作这个数列的**项**(term)，各项依次叫作这个数列的第 1 项(或首项)，第 2 项，第 3 项，…，第 n 项，….

数列的一般形式可以写成

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots.$$

其中 a_n 是数列的第 n 项．我们把上面的数列简记为 $\{a_n\}$．

数列可以看成以正整数集 $\mathbf{N}^*$（或它的有限子集 $\{1, 2, \cdots, n\}$）为定义域的函数 $a_n=f(n)$ 当自变量按照从小到大的顺序依次取值时所对应的一列函数值．反过来，对于函数 $y=f(x)$，如果 $f(i)$ $(i=1, 2, 3, \cdots)$ 有意义，那么我们可以得到一个数列

$$f(1), f(2), f(3), \cdots, f(n), \cdots.$$

如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项与序号 n 之间的关系可以用一个式子来表示，即 $a_n=f(n)$，那么这个式子叫作这个数列的**通项公式**（the formula of general term）．

数列可以用通项公式来表示，也可以通过列表、图象等方法来表示．

例如，数列④可用列表法表示如下：

n	1	2	3	4	5
a_n	4.9	19.6	44.1	78.4	122.5

数列④也可以用图象法表示，如图 1-2．从图象上看，它们是一系列孤立的点．

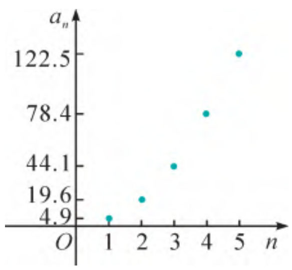


图 1-2

项数有限的数列叫作有穷数列，项数无限的数列叫作无穷数列．有穷数列的最后一项叫作数列的末项．上面的数列②，④是有穷数列，数列①，③，⑤都是无穷数列．

从第 2 项起，每一项都大于它的前一项的数列叫作递增数列；从第 2 项起，每一项都小于它的前一项的数列叫作递减数列；各项都相等的数列叫作常数列；从第 2 项起，有些项大于它的前一项，有些项小于它的前一项的数列叫作摆动数列．上面的数列中，①，③，④都是递增数列，⑤是递减数列，②是摆动数列．

例1 根据数列$\{a_n\}$的通项公式，写出它的前 5 项：

（1）$a_n=2$；　　（2）$a_n=(-1)^n\dfrac{n}{n+1}$；

（3）$a_n=\dfrac{1}{4}[(2n+1)-(-1)^n]$.

解　（1）在通项公式中依次取 $n=1$，2，3，4，5，得到数列$\{a_n\}$的前 5 项为

$$2，2，2，2，2.$$

（2）在通项公式中依次取 $n=1$，2，3，4，5，得到数列$\{a_n\}$的前 5 项为

$$-\frac{1}{2}，\frac{2}{3}，-\frac{3}{4}，\frac{4}{5}，-\frac{5}{6}.$$

（3）在通项公式中依次取 $n=1$，2，3，4，5，得到数列$\{a_n\}$的前 5 项为

$$1，1，2，2，3.$$

例2 写出下面数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

（1）1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，2；

（2）-1，$\dfrac{4}{3}$，$-\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{8}{5}$.

解　（1）这个数列的前 4 项可以写成

$$\sqrt{1}，\sqrt{2}，\sqrt{3}，\sqrt{4}.$$

每一项都是序号的算术平方根，所以它的一个通项公式是 $a_n=\sqrt{n}$.

（2）这个数列的前 4 项可以写成

$$-\frac{2}{2}，\frac{4}{3}，-\frac{6}{4}，\frac{8}{5}.$$

每一项的绝对值的分母都等于序号加 1，分子等于序号的 2 倍，且奇数项为负，偶数项为正，所以它的一个通项公式为

$$a_n=(-1)^n\cdot\frac{2n}{n+1}.$$

> 并非每一个数列都有通项公式. 例如，π 的不足近似值构成的数列 3.1，3.14，3.141，…就没有通项公式.

例3 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=|5n-27|$，求数列$\{a_n\}$中最小的项.

解 $a_n=\begin{cases}27-5n, & n\leqslant 5,\\ 5n-27, & n\geqslant 6.\end{cases}$

易知：$a_1>a_2>a_3>a_4>a_5$，$a_6<a_7<a_8<a_9<\cdots$.

又$a_5=2<a_6=3$，所以数列$\{a_n\}$中第5项最小，最小的项为2.

例4 在数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=1$，且$a_n=3a_{n-1}+1$ $(n\geqslant 2)$，写出这个数列的前4项.

解 $a_1=1$，

$a_2=3a_1+1=4$，

$a_3=3a_2+1=13$，

$a_4=3a_3+1=40$.

像例4这样，如果已知数列$\{a_n\}$的第1项(或前几项)，且任一项a_n与它的前一项a_{n-1}(或前几项)之间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式就叫作这个数列的**递推公式**. 递推公式也是给出数列的一种方法.

练习

1. 举出一些生活中数列的例子.
2. 根据数列$\{a_n\}$的通项公式，写出它的前5项：

   (1) $a_n=\frac{3}{2}+\frac{(-1)^n}{2}$；　　(2) $a_n=\frac{8}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$.
3. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3n+1$，37是否为这个数列中的项？如果是，是第几项？
4. 已知数列的前4项分别是下列各数，分别写出各数列的一个通项公式：

   (1) -1，1，3，5；　　(2) $\frac{1}{4}$，$-\frac{3}{8}$，$\frac{5}{12}$，$-\frac{7}{16}$；

   (3) 0，1，0，1；　　(4) $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{12}$，$\frac{1}{20}$.

习题 1.1

1. 根据数列$\{a_n\}$的通项公式，写出它的前 5 项：

(1) $a_n=\dfrac{1}{n^2}$；

(2) $a_n=(-1)^n\cdot(n^2-1)$；

(3) $a_n=|2n-7|$.

2. 已知数列的前 5 项分别是下列各数，写出各数列的一个通项公式：

(1) 1，2，4，8，16；

(2) 1，$-\dfrac{4}{3}$，$\dfrac{9}{5}$，$-\dfrac{16}{7}$，$\dfrac{25}{9}$；

(3) $2\dfrac{1}{2}$，$4\dfrac{1}{4}$，$6\dfrac{1}{8}$，$8\dfrac{1}{16}$，$10\dfrac{1}{32}$；

(4) 9，99，999，9999，99999.

3. 在数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=3$，$a_{10}=21$，数列的项是项数的一次函数.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式，并判断 2019 是不是数列$\{a_n\}$的项；

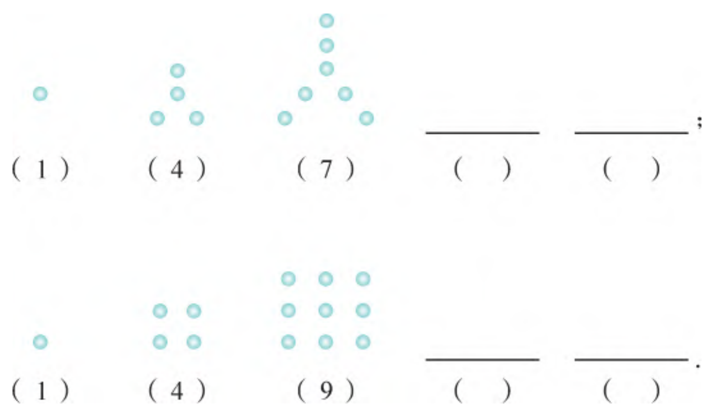
(2) 若$b_n=a_{2n}$，求数列$\{b_n\}$的通项公式.

4. 已知数列$\{a_n\}$，$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n$.

(1) 写出数列$\{a_n\}$的第 5 项；

(2) 写出数列$\{a_n\}$的通项公式.

5. 根据给出的图形及相应点数的规律，在空格和括号内分别填上适当的图形和点数，并写出点数构成的数列的一个通项公式.



(第 5 题图)

6. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=n^2-8n+5$.

(1) 写出这个数列的前 5 项，并作出它的图象；

(2) 这个数列中有没有最小的项？如果有，求出最小的项；如果没有，说明理由.

1.2 等差数列

考察下面的数列：

（1）第 23 届到第 32 届夏季奥运会举行的年份依次为

1984，1988，1992，1996，2000，2004，2008，2012，2016，2020.

（2）一个剧场设置了 20 排座位，从第一排起各排的座位数依次为

42，46，50，54，58，62，66，….

（3）如果 1 年期储蓄的月利率为 0.165%，那么将10 000元分别存 1 个月、2 个月、3 个月、……、12 个月，所得的本利和依次为

$$10\,000+16.5，10\,000+16.5\times 2，\cdots，10\,000+16.5\times 12.$$

“本利和”是指本金与利息的和，设本金为 A，利率为 p，存期为 n，本利和为 w，按照单利计算本利和的公式是

$$w=A\ (1+np).$$

以上数列，有一个共同的特点：从第 2 项起，每一项与前一项的差都等于同一个常数.

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都等于同一个常数，那么这个数列就叫作**等差数列**(arithmetic progression)，这个常数叫作等差数列的**公差**(common difference)，公差通常用字母 d 表示，即

$$a_{n+1}-a_n=d\ (n\in\mathbf{N}^*).$$

一般地，如果等差数列$\{a_n\}$的首项是 a_1，公差是 d，那么根据等差数列的定义可以得到

$$a_2-a_1=d，a_3-a_2=d，a_4-a_3=d，\cdots$$

所以

$$a_2=a_1+d，$$

$$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d，$$

$$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d，$$

$$\cdots$$

怎样用函数思想理解等差数列的通项公式?

由此得到

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

注意到当 $n=1$ 时，$a_1=a_1+(1-1)d$ 成立，这表明当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时上面的公式都成立，因而 $a_n=a_1+(n-1)d$ 就是等差数列的通项公式.

例1 求下列等差数列中的未知项：

(1) 3，a，5；　　(2) 3，b，c，-9.

解　(1) 由题意可得 $a-3=5-a$，解得 $a=4$.

(2) 由题意可得

$$\begin{cases}b-3=c-b,\\c-b=-9-c,\end{cases}$$

解得 $b=-1$，$c=-5$.

如果在 a 与 b 中间插入一个数 A，使得三个数 a，A，b 成等差数列，那么 A 叫作 a 与 b 的**等差中项**. 易知，a 与 b 的等差中项为 $\dfrac{a+b}{2}$.

容易看出，在有穷等差数列中，除首末两项外，每一项都是它的前一项与后一项的等差中项.

例2 判断下面的数列 $\{a_n\}$ 是否为等差数列：

(1) $a_n=3n+6$；　　(2) $a_n=2n^2+3n-1$.

解　(1) 由 $a_n=3n+6$，$n\in\mathbf{N}^*$，知 $a_{n+1}=3(n+1)+6$，于是

$$a_{n+1}-a_n=[3(n+1)+6]-(3n+6)=3,$$

由 n 的任意性知这个数列是公差为 3 的等差数列.

(2) 由通项公式计算可得

$$a_1=4,\ a_2=13,\ a_3=26.$$

由于 $a_2-a_1\neq a_3-a_2$，所以这个数列不是等差数列.

例3 已知数列$\{a_n\}$是等差数列.

（1）若 $a_1=10$，$d=-3$，求通项 a_n；

（2）若 $a_1=1$，$a_5=9$，求公差 d；

（3）若 $a_6=8$，$d=-2$，求首项 a_1.

解 （1）因为 $a_1=10$，$d=-3$，由等差数列的通项公式，得

$$a_n=10+(n-1)\times(-3),$$

即 $$a_n=-3n+13.$$

（2）因为 $a_1=1$，$a_5=9$，由等差数列的通项公式，得

$$a_5=a_1+(5-1)d,$$

即 $9=1+(5-1)d$，解得 $d=2$.

（3）因为 $a_6=8$，$d=-2$，由等差数列的通项公式，得

$$a_6=a_1+(6-1)d,$$

即 $8=a_1+(6-1)\times(-2)$，解得 $a_1=18$.

练习

1. 求等差数列-8，-3，2，…的第 10 项.
2. 100 是不是等差数列 2，9，16，…的项？如果是，是第几项？如果不是，说明理由.
3. 在等差数列$\{a_n\}$中，已知 $a_4=10$，$a_7=19$，求首项 a_1 和公差 d.
4. 若数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=kn+b$，k，b 为常数，$\{a_n\}$是等差数列吗？若是，它的首项和公差是什么？

习题 1.2

1. 已知等差数列$\{a_n\}$的首项为-24，从第 10 项起各项均为正数，求公差 d 的取值范围.
2. 已知三个数成等差数列，它们的和为 15，平方和为 83，求这三个数.
3. 求证：

（1）若$\{a_n\}$是公差为 d 的等差数列，n，$k\in\mathbf{N}^*$，则 $a_n=a_k+(n-k)d$；

（2）若$\{a_n\}$是等差数列，且 $k+l=m+n$（k，l，m，$n\in\mathbf{N}^*$），则 $a_k+a_l=a_m+a_n$；

（3）若$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都是等差数列，则数列$\{pa_n+qb_n\}$（p，$q\in\mathbf{R}$）也是等差数列.

4. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}^2=a_n^2+4$，且 $a_1=1$，$a_n>0$，求 a_n.

5. 已知等差数列$\{a_n\}$的首项$a_1=16$，公差$d=-\frac{3}{4}$.

(1) 此等差数列中从第几项开始出现负数?

(2) 当$|a_n|$最小时，求项数n的值.

6. 1934 年，东印度(今孟加拉国)学者森德拉姆(Sumdaram)发现了“正方形筛子”：

4	7	10	13	16	…
7	12	17	22	27	…
10	17	24	31	38	…
13	22	31	40	49	…
16	27	38	49	60	…
…	…	…	…	…	…

这个“正方形筛子”的奥秘是：如果自然数n出现在表中，那么$2n+1$肯定不是质数，如果自然数n未出现在表中，那么$2n+1$肯定是质数.

(1) 这个“正方形筛子”的每一行有什么特点？每一列呢？

(2) “正方形筛子”中位于第 100 行的第 100 个数是多少？

1.3 等差数列的前n项和

如图 1-3 是某公园凉亭顶部的一个侧面的示意图. 它的第一层有 1 块瓦，以下每一层均比上一层多 2 块瓦. 如果侧面共有 20 层瓦，凉亭顶部 4 个侧面结构完全相同，那么，建造这个凉亭至少需要多少块瓦?

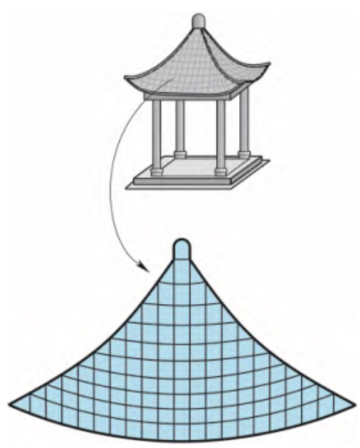


图 1-3

要解决这个问题，我们需要计算等差数列 1，3，5，…的前 20 项的和.

一般地，我们称

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

为数列 $\{a_n\}$ 的**前 n 项和**，用 S_n 表示，即

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n.$$

在计算 $1+2+\cdots+100$ 时，我们通常将等式

$$S_{100}=1+2+3+\cdots+98+99+100$$

与

$$S_{100}=100+99+98+\cdots+3+2+1$$

对应两项相加，其和均为 101，所以

$$2S_{100}=\underbrace{101+101+101+\cdots+101+101+101}_{共100项}.$$

因为共有 100 个 101，所以

$$2S_{100}=101\times100=10\ 100,$$

即

$$S_{100}=5\ 050.$$

上面的计算方法给了我们有益的启示.

设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，即

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n.$$

根据等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，上式可以写成

$$S_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+[a_1+(n-1)d], \quad ①$$

再把项的次序反过来，S_n 又可以写成

$$S_n=a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+\cdots+[a_n-(n-1)d], \quad ②$$

把①，②等号两边分别相加，得

$$\begin{aligned}2S_n&=\underbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n)}_{n个}\\&=n(a_1+a_n).\end{aligned}$$

由此得到等差数列的前 n 项和公式

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}.$$

怎样用函数思想理解等差数列的前 n 项和公式?

如果将等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 代入，S_n 也可以用首项 a_1 与公差 d 表示，即

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.$$

利用等差数列的求和公式，我们容易得到，建造本节开始提到的公园凉亭所需的瓦块数量为

$$4\times\left[20\times1+\frac{20\times(20-1)}{2}\times2\right]=1\,600(\text{块}).$$

例 1 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，

(1) 已知 $a_1=3$，$a_{50}=101$，求 S_{50}；

(2) 已知 $a_1=3$，$d=\frac{1}{2}$，求 S_{10}.

解 (1) 根据等差数列的前 n 项和公式，得

$$S_{50}=\frac{3+101}{2}\times50=2\,600.$$

(2) 根据等差数列的前 n 项和公式，得

$$S_{10}=10\times3+\frac{10\times9}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{105}{2}.$$

例 2 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $d=\frac{1}{2}$，$a_n=\frac{3}{2}$，$S_n=-\frac{15}{2}$，求 a_1 及 n.

解 由题意，得

$$\begin{cases}\dfrac{a_1+\frac{3}{2}}{2}\times n=-\dfrac{15}{2}, & ①\\ a_1+(n-1)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}. & ②\end{cases}$$

由②，得

$$a_1=-\frac{1}{2}n+2. \qquad ③$$

将③代入①后化简，得 $n^2-7n-30=0$，解得 $n=10$ ($n=-3$ 舍去).

把 $n=10$ 代入③，得 $a_1=-\frac{1}{2}\times10+2=-3$.

例3 在我国古代，9 是数字之极，代表尊贵之意，所以中国古代皇家建筑中包含许多与 9 相关的设计. 例如，北京天坛圆丘的地面由扇环形的石板铺成，最高一层的中心是一块天心石，围绕它的第一圈有 9 块石板，从第二圈开始，每一圈比前一圈多 9 块，共有 9 圈. 请问：

(1) 第 9 圈共有多少块石板?

(2) 前 9 圈一共有多少块石板?

解 设从第 1 圈到第 9 圈的石板数组成的数列为 $\{a_n\}$，由题意可知 $\{a_n\}$ 是等差数列，其中 $a_1=9$，$d=9$，$n=9$.

(1) 由等差数列的通项公式，得第 9 圈有石板

$$a_9=a_1+(9-1)d=9+(9-1)\times9=81\text{(块)}.$$

(2) 由等差数列前 n 项和公式，得前 9 圈一共有石板

$$S_9=9a_1+\frac{9\times(9-1)}{2}d=9\times9+\frac{9\times8}{2}\times9=405\text{(块)}.$$

答：第 9 圈有 81 块石板，前 9 圈一共有 405 块石板.

例4 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=an^2+bn$ $(a\in\mathbf{R}$，$b\in\mathbf{R})$. 求证：$\{a_n\}$ 成等差数列.

证明 当 $n\geqslant2$ 时，

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=an^2+bn-[a(n-1)^2+b(n-1)]\\&=2an-a+b.\end{aligned}$$

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=a+b=2a-a+b$，上式也成立.

所以 $a_n=2an-a+b$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

又当 $n\geqslant2$ 时，

$$a_n-a_{n-1}=2an-a+b-[2a(n-1)-a+b]=2a,$$

因此数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $a+b$，公差为 $2a$ 的等差数列.

数列 $\{a_n\}$ 中，前 n 项和 S_n 与第 n 项 a_n 之间有如下关系式：

$$a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1),\\ S_n-S_{n-1} & (n\geqslant2).\end{cases}$$

练习

1. 已知$\{a_n\}$为等差数列，公差为d.

（1）$a_1=20$，$a_n=54$，$S_n=999$，求d及n；

（2）$a_1=\frac{5}{6}$，$d=-\frac{1}{6}$，$S_n=-5$，求n及a_n.

2. 等差数列-10，-6，-2，…的前多少项的和是54？

3. 求集合$M=\{m|m=2n-1, n\in\mathbf{N}^*$，且$m<80\}$中元素的个数，并求$M$中所有元素的和.

4. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_n=\frac{3}{2}n-\frac{21}{2}$，求当$n$为何值时，前$n$项和$S_n$取最小值.

习题 1.3

1. 在等差数列$\{a_n\}$中，已知$d=2$，$S_{20}=400$.

（1）求$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19}$；

（2）求$a_2+a_5+a_8+\cdots+a_{20}$.

2. 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=5n^2+3n$，写出它的前三项，并求这个数列的通项公式.

3. 等差数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=-3$，$11a_5=5a_8$，求前n项和S_n的最小值.

4. 设S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和. 已知$S_7=7$，$S_{15}=75$，求数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$的前$n$项和$T_n$.

5. 一个等差数列的前12项和为354，前12项中，偶数项的和与奇数项的和之比为32∶27，求公差d.

6. 如果等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，那么S_{10}，$S_{20}-S_{10}$，$S_{30}-S_{20}$是否成等差数列？你能得到更一般的结论吗？

7. 观察如图按三角形排列的数阵，第一行有1个数，第二行有3个数相加，第3行有5个数相加，依此类推

$$
\begin{array}{c}
1\\
1+2+1\\
1+2+3+2+1\\
1+2+3+4+3+2+1\\
\cdots
\end{array}
$$

（第7题图）

（1）第100行有多少个数相加？这些数的和是多少？

（2）计算第n行各个数的和.

有关储蓄的计算

储蓄与人们的生活密切相关，计算储蓄所得利息的基本公式是

利息＝本金×存期×利率.

根据国家的规定，储蓄存款在 2008 年 10 月 9 日后（含 10 月 9 日）产生的利息，暂免征收个人所得税.

下面介绍两种储蓄形式.

1. 整存整取定期储蓄

这是指一次存入本金，完成约定存期后一次取出本金及其利息的一种储蓄. 2018 年中国人民银行在某段时间内规定的这种储蓄的年利率如下表：

存期	1 年	2 年	3 年	5 年
年利率/%	1.75	2.25	2.75	2.75

例如，按这种方式存入 5 000 元，存期 3 年，那么 3 年到期时所得利息为

$$5\,000\times3\times2.75\%=412.5(\text{元}),$$

实际取出

$$5\,000+412.5=5\,412.5(\text{元}).$$

2. 活期储蓄

这是指存期不定、可以随时存取的一种储蓄，计算利息时，每年按 360 天，每月按 30 天计算存期. 2018 年中国人民银行在某段时间内规定的活期储蓄的年利率为 0.3%.

例如，7 月 15 日存入 10 000 元，同年 8 月 25 日全部取出，由于存期是 40 天（算头不算尾），所以，应得利息为

$$(10\,000\times40\times0.3\%)\div360\approx3.33(\text{元}),$$

实际取出

$$10\,000+3.33=10\,003.33(\text{元}).$$

如果遇到利率调整，常常分段计算利息. 下面仍以 2018

年中国人民银行在某段时间内规定的1年定期储蓄的年利率1.75%为标准，介绍分期存入后一次取出的一种储蓄的利息计算.

例如，某人从1月起，每月第1天存入1 000元，到12月最后一天取出全部本金及其利息，已知月利率是0.146%，那么实际取出多少元钱？

为回答这一问题，先来研究这类问题的一般计算公式. 设每期期初存入的金额为A(单位：元)，连续存n次，每期的利率为p，那么到第n期期末时，本金为nA，且各期存款的利息如下：

第1期存款利息：Apn，

第2期存款利息：$Ap(n-1)$，

……

第$(n-1)$期存款利息：$Ap\times 2$，

第n期存款利息：$Ap\times 1$.

于是，应得到的全部利息就是上面各期利息之和

$$\begin{aligned} S_n &= Ap+Ap\times 2+\cdots+Ap(n-1)+Apn \\ &= Ap(1+2+\cdots+n) \\ &= \frac{1}{2}n(n+1)Ap, \end{aligned}$$

所以实际取出$nA+\frac{1}{2}n(n+1)Ap$元.

用这个公式求解上面提出的问题时，$A=1\ 000$，$n=12$，$p=0.146\%$，所以实际取出的钱数为

$$1\ 000\times\left(12+\frac{1}{2}\times 12\times 13\times 0.146\%\right)=12\ 113.88\ (\text{元}).$$

讨论题

某银行分别推出一年期和三年期零存整取的理财存款. 一年期每月定期存入2 000元，累计12个月存入金额24 000元，年利率为1.35%. 三年期每月定期存入2 500元，累计36个月存入金额90 000元，年利率为1.55%. 分别求以上两种理财存款到期后的本息和.

1.4 等比数列

我们观察下面的数列：

（1）将一张 A3 大小的白纸对折，然后再对折，这样连续对折 6 次，则每次对折后纸的层数依次构成数列

$$2，2^2，2^3，2^4，2^5，2^6. \qquad ①$$

（2）镭是一种放射性元素，它的所有同位素都具有强烈的放射性，其中最稳定的同位素是镭-226，半衰期约为 1 620 年．如果原有 10 克镭-226，那么从第 1 年开始统计，此后每隔 1 620 年统计 1 次，每次统计到的镭的质量（单位：克）依次构成数列

$$10，10\times\frac{1}{2}，10\times\left(\frac{1}{2}\right)^2，10\times\left(\frac{1}{2}\right)^3，\cdots. \qquad ②$$

在放射性衰变过程中，放射性元素的核数目减少到原来的一半所需的时间，称为这种放射性元素的半衰期.

（3）某人年初投资 10 000 元，如果年收益率是 5%，那么按照复利，5 年内各年末的本利和（单位：元）依次构成数列

$$10\,000\times1.05，10\,000\times1.05^2，10\,000\times1.05^3，$$
$$10\,000\times1.05^4，10\,000\times1.05^5. \qquad ③$$

“本利和”是指本金与利息的和．设本金为 A，利率为 p，存期为 n，本利和为 w，按照复利，计算本利和的公式是

$$w=A(1+p)^n.$$

这些数列都有一个共同的特点：从第 2 项起，每一项与前一项的比都等于同一常数．对于数列①，这个常数为 2；对于数列②，这个常数为$\frac{1}{2}$；对于数列③，这个常数为 1.05.

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的比都等于同一个常数，那么这个数列叫作**等比数列**（geometric progression），这个常数叫作等比数列的**公比**（common ratio），公比通常用字母 q 表示（$q\neq0$）.

等比数列中公比 q 为什么不能为 0？能否有某一项为 0？

与等差中项的概念类似，如果在 a 与 b 中间插入一个数 G，使得三个数 a，G，b 成等比数列，那么 G 叫作 a 与 b 的**等比中项**．容易看出，在有穷等比数列中，除首末两项外，每一项都是它的前一项与后一项的等比中项.

对于一个等比数列，已知它的首项 a_1 和公比 q，怎样写出它的通项公式呢？

设这个等比数列是

$$a_1，a_2，a_3，\cdots，a_n，\cdots.$$

由等比数列的定义可以知道，当 $n\geqslant 2$ 时，

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}=q.$$

从而

$$a_2=a_1q,$$

$$a_3=a_2q=(a_1q)q=a_1q^2,$$

$$a_4=a_3q=(a_1q^2)q=a_1q^3,$$

$$\cdots$$

由此可归纳出

$$a_n=a_1q^{n-1}\ (n\geqslant 2).$$

在这个公式里，如果令 $n=1$，那么

$$a_1=a_1q^{1-1}=a_1q^0=a_1.$$

由此可知，a_1 也可以用这个公式来表示，所以这个公式就是所要求的通项公式. 这就是说，首项是 a_1，公比是 q 的等比数列的通项公式是

$$a_n=a_1q^{n-1}\ (a_1\neq 0,\ q\neq 0).$$

如何用函数思想来理解等比数列的通项公式 $a_n=a_1q^{n-1}$？

例 1 已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，公比为 q.

（1）若 $a_1=2$，$a_5=162$，求 q；

（2）若 $a_6=-96$，$q=2$，求 a_1.

解 （1）由通项公式 $a_n=a_1q^{n-1}$，得 $a_5=a_1q^4$，即 $162=2q^4$，所以 $q=3$ 或 $q=-3$.

（2）由通项公式 $a_n=a_1q^{n-1}$，得 $a_6=a_1q^5$，即 $-96=a_1\times 2^5$，所以 $a_1=-3$.

例 2 一个等比数列的首项是 2，第 2 项与第 3 项的和是 12，求它的第 8 项.

解 设等比数列的首项为 a_1，公比为 q，则由已知，得

$$\begin{cases}a_1=2,\\ a_1q+a_1q^2=12.\end{cases}$$

所以 $q^2+q-6=0$，解得 $q=-3$ 或 $q=2$.

当 $q=-3$ 时，$a_8=a_1q^7=2\times(-3)^7=-4\ 374$；

当 $q=2$ 时，$a_8=a_1q^7=2\times2^7=256$.

故数列的第 8 项是 $-4\ 374$ 或 256.

例3 在各项为负数的数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $2a_n=3a_{n+1}$，且 $a_2\cdot a_5=\frac{8}{27}$.

（1）求证：$\{a_n\}$ 是等比数列，并求出通项公式；

（2）$-\frac{16}{81}$ 是这个等比数列中的项吗？如果是，指出是第几项．如果不是，请说明理由.

解 （1）因为 $2a_n=3a_{n+1}$，且 $a_n\neq0$，所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2}{3}$，故数列 $\{a_n\}$ 是公比为 $q=\frac{2}{3}$ 的等比数列.

由 $a_2\cdot a_5=\frac{8}{27}$，可得 $a_1q\cdot a_1q^4=\frac{8}{27}$，即 $a_1^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5=\left(\frac{2}{3}\right)^3$.

由于数列各项均为负数，故 $a_1=-\frac{3}{2}$.

所以 $a_n=-\frac{3}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$，即 $a_n=-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$.

（2）设 $a_n=-\frac{16}{81}$，由等比数列的通项公式，得

$$-\frac{16}{81}=-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2},$$

即

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}.$$

根据指数函数的性质，有 $4=n-2$，即 $n=6$.

因此，$-\frac{16}{81}$ 是这个等比数列的第 6 项.

例4 为了解某种病毒在动物体内的繁殖规律，科研人员将 1 个单位的病毒注入小白鼠体内，对小白鼠体内的病毒数量每隔 4 小时检测一次，测得的数据整理如下表：

经过时间/小时	0	4	8	12	16
病毒数量/单位	1	1.25	1.25^2	1.25^3	1.25^4

试根据上述数据研究如下问题：

（1）将小白鼠体内病毒的数量表示为所经过时间 t（单位：小时）的函数，并使之与测试的数据相吻合；

（2）如果当病毒的数量达到 300 个单位时，小白鼠出现明显的发病症状，用（1）中得到的函数说明小白鼠注射病毒后多长时间出现病症.

解 （1）设小白鼠注入 1 个单位病毒后经过 $4n$ 小时体内病毒数量为 a_n 个单位.

由表中数据可得，$a_n=1.25^n$.

当 $t=4n$ 时，有 $n=\frac{t}{4}$.

所以，函数 $f(t)=1.25^{\frac{t}{4}}(t>0)$ 满足要求.

（2）由 $1.25^{\frac{t}{4}}\geqslant 300$ 两边取常用对数，得 $\lg 1.25^{\frac{t}{4}}\geqslant \lg 300$，

即
$$\frac{t}{4}\lg 1.25\geqslant \lg 300,$$

所以 $t\geqslant\frac{4\lg 300}{\lg 1.25}$.

用计算器算得约为 $t\geqslant 102$.

即给小白鼠注射 1 个单位的病毒后约 102 小时出现病症.

练习

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列.

（1）如果 $a_2=2$，$a_3=-6$，求公比 q 和 a_1；

（2）如果 $a_1=3$，$a_2=6$，求公比 q 和 a_5.

2. 求下列各组数的等比中项：

（1）$7+3\sqrt{5}$ 和 $7-3\sqrt{5}$；　　（2）$(a+b)^2$ 和 $(a-b)^2$ $(a\neq\pm b)$.

3. 三个数成等比数列，它们的和等于 14，它们的积等于 64，求这三个数.

4. 已知 $\{a_n\}$ 是无穷等比数列，公比为 q.

（1）将数列 $\{a_n\}$ 中的前 k 项去掉，剩余各项组成一个新数列，这个新数列是等比数列吗？如果是，它的首项和公比各是多少？

（2）取出数列 $\{a_n\}$ 中的所有奇数项，组成一个新的数列，这个新数列是等比数列吗？如果是，它的首项和公比各是多少？

（3）在数列 $\{a_n\}$ 中，从第 1 项开始，每隔 10 项取出一项，组成一个新的数列，这个数列是等比数列吗？如果是，它的公比是多少？

习题 1.4

1. 已知数列$\{a_n\}$为等比数列，公比为 q.

(1) $a_4=27$，$q=-3$，求 a_7；

(2) $a_2=18$，$a_4=8$，求 a_1 与 q；

(3) $a_5=4$，$a_7=6$，求 a_9；

(4) $a_5-a_1=15$，$a_4-a_2=6$，求 a_3.

2. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和满足 $\lg(S_n+1)=n$，判断数列$\{a_n\}$是否为等比数列，并说明理由.

3. 在数列$\{a_n\}$中，S_n 为$\{a_n\}$的前 n 项和，已知 $a_1=1$，$a_{n+1}=2S_n$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

4. 污水处理工厂通过清除水中污物对污水进行处理，并生产出有用的肥料和清洁用水. 若这种处理过程每小时从处理池中清除出 12%的残留污物，24 小时后还有百分之几的污物残留在处理池中？要使池中污物降到原来所含污物的 10%，需要多长时间？

5. 在等比数列$\{a_n\}$中，

(1) $a_5^2=a_3a_7$ 是否成立？$a_5^2=a_1a_9$ 是否成立？

(2) 你能得到一般的结论吗？

6. 求证：

(1) 在公比为 q 的等比数列$\{a_n\}$中，对任意 n，$k\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n=a_kq^{n-k}$；

(2) 若$\{a_n\}$是等比数列，且 $k+l=m+n$ (k，l，m，$n\in\mathbf{N}^*$)，则 $a_ka_l=a_ma_n$；

(3) 若$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都是等比数列，则 $\{pa_nb_n\}$ ($p\in\mathbf{R}$，$p\neq0$) 也是等比数列.

1.5 等比数列的前 n 项和

在我国古代数学名著《算法统宗》中有一道趣题：

远望巍巍塔七层，红光点点倍加增；

数得尖端灯三盏，试问共有几盏灯.

要解决这一问题，我们需要计算等比数列

$$3，3\times2，3\times2^2，3\times2^3，\cdots$$

的前 7 项的和.

一般地，对于等比数列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots,$$

它的前 n 项和是

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n.$$

根据等比数列的通项公式，上式可写成

$$S_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}, \quad ①$$

①的两边分别乘以 q，得

$$qS_n=a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}+a_1q^n. \quad ②$$

①的两边分别减去②的两边，得

$$S_n-qS_n=a_1(1-q^n),$$

即 $$S_n(1-q)=a_1(1-q^n).$$

由此得到：$q\neq1$ 时，等比数列的前 n 项和公式为

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \quad (q\neq1).$$

因为

$$a_1q^n=(a_1q^{n-1})q=a_nq,$$

所以上面的公式还可以写成

$$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q} \quad (q\neq1).$$

很明显，当 $q=1$ 时，从①式可得 $S_n=na_1$.

从而，等比数列的前 n 项和公式为

$$S_n=\begin{cases} na_1 & (q=1), \\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q} & (q\neq1). \end{cases}$$

例1 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，

(1) 已知 $a_1=-4$，$q=\frac{1}{2}$，求 S_{10}；

(2) 已知 $a_1=1$，$a_k=243$，$q=3$，求 S_k.

解 (1) 根据等比数列的前 n 项和公式，得

$$S_{10}=\frac{-4\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1-\frac{1}{2}}=-\frac{1\,023}{128}.$$

（2）根据等比数列的前 n 项和公式，得

$$S_k=\frac{1-243\times3}{1-3}=364.$$

例2 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$S_3=\frac{7}{2}$，$S_6=\frac{63}{2}$，求 a_n.

解 若 $q=1$，则 $S_6=2S_3$，这与已知 $S_3=\frac{7}{2}$，$S_6=\frac{63}{2}$ 是矛盾的，所以 $q\neq1$. 从而

$$\begin{cases} S_3=\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}=\dfrac{7}{2}, & ① \\ S_6=\dfrac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\dfrac{63}{2}. & ② \end{cases}$$

用②除以①，得 $1+q^3=9$，解得 $q=2$，代入①式可得 $a_1=\frac{1}{2}$.

因此等比数列的通项公式为 $a_n=\frac{1}{2}\times2^{n-1}$，即 $a_n=2^{n-2}$.

例3 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，S_3，S_9，S_6 成等差数列，求数列 $\{a_n\}$ 的公比.

解 因为 S_3，S_9，S_6 成等差数列，所以 $S_3+S_6=2S_9$.

若 $q=1$，则 $S_3=3a_1$，$S_6=6a_1$，$S_9=9a_1$，由 $a_1\neq0$ 可得 $S_3+S_6\neq2S_9$，与题设矛盾，所以 $q\neq1$.

于是，由 $S_3+S_6=2S_9$ 得

$$\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{2a_1(1-q^9)}{1-q},$$

整理得 $q^3+q^6=2q^9$.

因为 $q\neq0$，所以 $1+q^3=2q^6$. 解得

$$q^3=1\text{（舍去）或 }q^3=-\frac{1}{2},$$

所以 $q=-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$.

练习

1. 设$\{a_n\}$是公比为q的等比数列，解下列各题：

(1) $a_1=\frac{12}{5}$，$q=-\frac{3}{2}$，$n=5$，求S_n；　(2) $a_1=8$，$q=\frac{1}{2}$，$a_n=\frac{1}{2}$，求S_n；

(3) $a_1=-\frac{3}{2}$，$a_4=96$，求q与S_4；　(4) $a_1=2$，$S_3=26$，求q与a_3.

2. 设$\{a_n\}$是公比为正数的等比数列，$a_1=2$，$a_3=a_2+4$，求数列$\{a_n\}$的前n项和S_n.
3. 设$\{a_n\}$为等比数列，S_n为其前n项和，已知$a_5=2S_4+3$，$a_6=2S_5+3$，求公比q.
4. 已知数列$\{a_n\}$，如果a_1，a_2-a_1，a_3-a_2，…，a_n-a_{n-1}，…构成首项为1，公比为$\frac{1}{3}$的等比数列，求a_n.
5. 一个小球从a米高处自由下落，每次着地后又弹回到原来高度的$\frac{1}{3}$，那么当它第10次着地时，共经过的路程是多少米？

习题 1.5

1. 已知等比数列$\{a_n\}$的公比是2，$S_4=1$，求S_8.
2. 在等比数列$\{a_n\}$中，已知公比$q>1$，$a_m=54$，$S_m=80$，$S_{2m}=6\,560$，求m的值.
3. 在等比数列$\{a_n\}$中，已知$a_1+a_n=66$，$a_2a_{n-1}=128$，$S_n=126$，求n，q.
4. 求和：

(1) $\left(2+\frac{1}{3}\right)+\left(4+\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(2n+\frac{1}{3^n}\right)$；

(2) $(a-1)+(a^2-2)+\cdots+(a^n-n)$.

5. 已知元素为正整数的数集序列：$\{1\}$，$\{2,3\}$，$\{4,5,6\}$，$\{7,8,9,10\}$，…，从第二个数集开始，每一个数集都比前一个数集多一个数，每一个数集中的最小数比前一个数集中的最大数大1. 试求第n个数集中所有数的和S_n.
6. 用分期付款的方式购买家用电器1件，价格为1 150元. 购买当天先付50元，以后每月这一天都交付50元，并加付欠款的利息（月利率为1%）. 若交付50元以后的第一个月开始为分期付款的第一个月，问：分期付款的第十个月该交付多少钱？全部货款付清后，买这件家用电器共付了多少钱？
7. 某企业进行技术改造，提出两种方案：方案甲是一次性投资80万元，引进一条先进的生产线，每年可增加收益20万元；方案乙是一次性投资60万元改进现有设备，每年可减少成本开支18万元(减少成本开支相当于增加收入)，资金往来都通过银行结算，银行进出款的年利率都是5%. 如果甲、乙两种方案同时开始实施，实施年限都是10年，问：实施哪种方案所获得的净收益较高？

1.6 *数学归纳法

由

$1=1^2$，$1+3=2^2$，$1+3+5=3^2$，$1+3+5+7=4^2$，…

归纳得出结论

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2\ (n\in\mathbf{N}^*). \qquad ①$$

这是一个与正整数 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 有关的数学命题. 正整数有无穷多个，我们无法对所有的正整数逐一进行验证，那么，怎样证明一个与正整数有关的命题呢？

著名数学家华罗庚曾经举过一个例子.

从一个袋子里摸出来的第一个是红玻璃球，第二个是红玻璃球，甚至第三个、第四个、第五个都是红玻璃球的时候，我们立刻会出现一种猜想："是不是这个袋子里的东西全部都是红玻璃球？"因为袋子里的东西是有限的，迟早可以把它们摸完，这样总可以得到一个正确的结论.

因此，当袋子里的东西是有限个的时候，要弄清楚袋子里究竟装了什么东西是一件很容易的事. 但是，当袋子里的东西是无限多个的时候，该怎么办呢？

如果我们有这样的一个保证："当你这一次摸出红玻璃球的时候，下一次摸出来的东西也一定是红玻璃球"，那么，就不必费力去一个一个地摸了，只要第一次摸出来的确实是红玻璃球，就可以立即作出"袋子里的东西全是红玻璃球"的正确结论. 因此，得出"袋子里的东西全是红玻璃球"这个结论，必须满足两个条件：

(1) 第一次摸出来的是红玻璃球；

(2) 当你这一次摸出红玻璃球的时候，下一次摸出来的东西也一定是红玻璃球.

可以看出，条件(2)事实上给出了一个递推关系，当第 $k(k\in\mathbf{N}^*)$ 次摸出来的是红玻璃球时，相邻的第 $k+1$ 次摸出来的也是红玻璃球. 这样，只要第一次摸出来的是红玻璃球，

其后每一次摸出来的全是红玻璃球，因此，无论有多少个东西，只要保证(1)和(2)成立，那么每次摸出来的东西都是红玻璃球.

一般地，我们把与正整数n($n\in\mathbf{N}^*$)有关的命题记为$P(n)$，那么$P(n)$可以看作一串命题$P(1)$，$P(2)$，$P(3)$，…，$P(k)$($k\in\mathbf{N}^*$)，…. 我们设想，如果命题$P(1)$成立，就有命题$P(2)$也成立；如果命题$P(2)$成立，就有命题$P(3)$也成立；如果命题$P(3)$成立，就有命题$P(4)$也成立；等等. 即如果前一个命题$P(k)$成立，能够推出后一个命题$P(k+1)$也成立，那么，由$P(1)$成立，就可以得到：对于所有的正整数n，命题$P(n)$都成立.

一般地，证明一个与正整数n有关的数学命题$P(n)$，可按下列步骤进行：

(1) 证明当n取第一个值n_0($n_0\in\mathbf{N}^*$)时，$P(n_0)$成立；

(2) 假设当$n=k$($k\in\mathbf{N}^*$，且$k\geqslant n_0$)时，$P(k)$成立，证明：当$n=k+1$时，$P(k+1)$也成立.

只要完成这两个步骤，就可以断定命题对于从n_0开始的所有正整数n都成立.

我们把这种证明方法叫作**数学归纳法**.

现在我们用数学归纳法来证明等式①.

(1) 当$n=1$时，左边$=1$，右边$=1^2=1$，等式成立.

(2) 假设当$n=k$($k\in\mathbf{N}^*$)时等式①成立，即

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2.$$

那么，当$n=k+1$时，

$$\begin{aligned}&1+3+5+\cdots+(2k-1)+[2(k+1)-1]\\=&k^2+[2(k+1)-1]\\=&k^2+2k+1\\=&(k+1)^2.\end{aligned}$$

这就是说，当$n=k+1$时等式①也成立.

根据(1)和(2)可知，等式①对任何$n\in\mathbf{N}^*$都成立.

例1 设$f(n)=5^n+2\times3^{n-1}+1$($n\in\mathbf{N}^*$)，求证：$f(n)$能被8整除.

证明 (1) 当 $n=1$ 时，$f(1)=5+2\times3^0+1=8$，能被 8 整除，命题成立.

(2) 假设当 $n=k\ (k\in\mathbf{N}^*)$ 时命题成立，即 $f(k)=5^k+2\times3^{k-1}+1$ 能被 8 整除.

当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}f(k+1)&=5^{k+1}+2\times3^k+1\\&=5\times5^k+6\times3^{k-1}+1\\&=(5^k+2\times3^{k-1}+1)+4(5^k+3^{k-1})\\&=f(k)+4(5^k+3^{k-1}).\end{aligned}$$

这里，5^k 和 3^{k-1} 均为奇数，它们的和 5^k+3^{k-1} 必为偶数，从而 $4(5^k+3^{k-1})$ 能被 8 整除，又知 $f(k)$ 能被 8 整除，那么 $f(k)+4(5^k+3^{k-1})$ 必能被 8 整除，即 $f(k+1)$ 能被 8 整除.

这就是说，当 $n=k+1$ 时命题也成立.

根据 (1) 和 (2) 可知，命题对任何 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

例2 是否存在常数 a，b，c，使等式

$$\begin{aligned}&1\cdot2^2+2\cdot3^2+3\cdot4^2+\cdots+n(n+1)^2\\&=\frac{n(n+1)}{12}\cdot(an^2+bn+c)\end{aligned}$$

对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

解 假设存在 a，b，c 使得等式对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立，分别令 $n=1$，2，3，得

$$a+b+c=24,$$
$$4a+2b+c=44,$$
$$9a+3b+c=70,$$

联立解得

$$a=3,\ b=11,\ c=10.$$

此时

$$an^2+bn+c=3n^2+11n+10=(n+2)(3n+5).$$

下面用数学归纳法证明：对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，

$$\begin{aligned}&1\cdot2^2+2\cdot3^2+3\cdot4^2+\cdots+n(n+1)^2\\&=\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5).\end{aligned}\qquad ①$$

（1）当 $n=1$ 时，左边 $=4=$ 右边，①式成立；

（2）假设当 $n=k$ 时①式成立，即有

$$1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+3\cdot 4^2+\cdots+k(k+1)^2$$
$$=\frac{1}{12}k(k+1)(k+2)(3k+5).$$

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+3\cdot 4^2+\cdots+k(k+1)^2+(k+1)(k+2)^2$$
$$=\frac{1}{12}k(k+1)(k+2)(3k+5)+(k+1)(k+2)^2$$
$$=\frac{1}{12}(k+1)(k+2)[k(3k+5)+12(k+2)]$$
$$=\frac{1}{12}(k+1)(k+2)(3k^2+17k+24)$$
$$=\frac{1}{12}(k+1)(k+2)(k+3)(3k+8)$$
$$=\frac{1}{12}(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2][3(k+1)+5],$$

即当 $n=k+1$ 时，①式也成立.

根据(1)和(2)可知，对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，①式成立.

因此，当 $a=3$，$b=11$，$c=10$ 时，等式

$$1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+3\cdot 4^2+\cdots+n(n+1)^2$$
$$=\frac{n(n+1)}{12}\cdot(an^2+bn+c)$$

对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

例3 平面内有 $n(n\geqslant 2)$ 条直线，其中任何两条不平行，任何三条不共点. 记这 n 条直线所有交点的个数为 $f(n)$. 试推测出计算 $f(n)$ 的公式，并给出证明.

解 如图 1-4，依次作出直线 l_1，l_2，l_3，l_4，l_5. 直接计数可得

$$f(2)=1,\ f(3)=3,\ f(4)=6,\ f(5)=10.$$

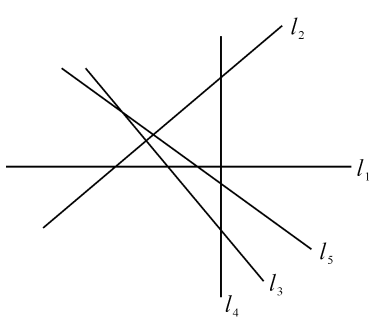


图 1-4

对数据进行整理，得

$$f(2)=\frac{1}{2}\times 2\times(2-1),$$
$$f(3)=\frac{1}{2}\times 3\times(3-1),$$

$f(4)=\frac{1}{2}\times 4\times(4-1)$，

$f(5)=\frac{1}{2}\times 5\times(5-1)$.

从而猜想 $f(n)=\frac{1}{2}n(n-1)$.

下面用数学归纳法证明：

（1）当 $n=2$ 时，猜想显然成立.

（2）假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*, k\geqslant 2)$ 时猜想成立，现在考虑平面内有 $k+1$ 条直线的情况.

任取其中一条直线，记为 l，由上述归纳法的假设可知，除 l 以外的其他 k 条直线的交点个数 $f(k)=\frac{1}{2}k(k-1)$. 另外，因为已知任何两条直线不平行，所以直线 l 必与平面内其他 k 条直线都相交，有 k 个交点. 又因为已知任何三条直线不共点，所以这 k 个交点两两不相同，且与其他的 $\frac{1}{2}k(k-1)$ 个交点也两两不相同，从而 $k+1$ 条直线之间的交点的总个数是

$f(k+1)=\frac{1}{2}k(k-1)+k=\frac{1}{2}(k+1)[(k+1)-1]$.

这就是说，当 $n=k+1$ 时，猜想也成立.

根据（1）和（2）可知，对任何 $n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant 2$，都有 $f(n)=\frac{1}{2}n(n-1)$.

练习

1. 用数学归纳法证明：

（1）$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\quad(n\in\mathbf{N}^*)$；

（2）$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2\quad(n\in\mathbf{N}^*)$；

（3）$4^{2n+1}+3^{n+2}$ 能被 13 整除 $(n\in\mathbf{N}^*)$.

2. 已知数列 $\frac{1}{1\times 4}$，$\frac{1}{4\times 7}$，$\frac{1}{7\times 10}$，…，$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$，…，S_n 是数列的前 n 项和. 计算 S_1，S_2，S_3，S_4，根据计算结果，猜想 S_n 的表达式，并用数学归纳法进行证明.

习题 1.6

1. 用数学归纳法证明：

（1）$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$ （$n\in\mathbf{N}^*$）；

（2）$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ （$n\in\mathbf{N}^*$）；

（3）$x^{2n-1}+y^{2n-1}$能被 $x+y$ 整除（$n\in\mathbf{N}^*$）.

2. 已知 $x>-1$，且 $x\neq0$，$n\in\mathbf{N}^*$，且 $n\geqslant2$，求证：$(1+x)^n>1+nx$.

3. 如果 $n\in\mathbf{N}^*$，且 $n>1$，求证：$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$.

4. 如果 $a>0$，$b>0$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$，求证：$\frac{a^n+b^n}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^n$.

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}$，$a_1=0$，试猜想数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，并用数学归纳法证明.

阅读与讨论

斐波那契数列

一个有趣的兔子问题：假定一对兔子在出生两月后就开始有繁殖能力，每一个月可以生一对小兔子（一雄一雌）. 从一对小兔子开始，如果所有兔子都不死，问：一年后能繁殖成多少对兔子？

我们以一对新生小兔子来进行分析.

第一个月、第二个月小兔子没有繁殖能力，所以每月还是 1 对兔子. 第二个月后，这对兔子开始有繁殖能力，生 1 对小兔子，所以第三个月共有 2 对兔子. 第四个月，原来的那对兔子又生下 1 对小兔子，因为新生的小兔子还没有繁殖能力，所以第四个月共有 3 对兔子.

依此类推，可以列出每月兔子的对数为

$$1，1，2，3，5，8，13，21，34，\cdots.$$

这个数列是意大利数学家斐波那契在《算盘全书》中提出的，人们称之为斐波那契数列.

斐波那契 1175 年出生于比萨的商业中心，其父在那里经商，他父亲的职业唤起了斐波那契对算术的兴趣. 后来，斐波那契旅行到埃及、希腊和叙利亚，又接触到东方和阿拉伯的数学. 1202 年，回到家后不久，他发表了著作《算盘全书》.《算盘全书》对从希腊、印度、阿拉伯那里学来的所有算术和代数知识做了整理和总结. 斐波那契因为他在《算盘全书》中所创造的数列而闻名于世.

斐波那契数列虽如此简单，却有许多有趣的性质，如：

(1) 在数列中，从第 3 项起，每一项都是它相邻前两项的和；

(2) 任何相邻两项的比约为 0.618 或 1.618，并且，数值越大，相邻两项的比越接近 0.618 或 1.618(黄金分割比)，所以这个数列也称为黄金数列；

(3) 任何连续的两个斐波那契数都互素；

(4) 任何连续的十个斐波那契数之和都可被 11 整除；

……

斐波那契数也反映了自然界特别是植物世界的一些规律. 研究发现，植物的花瓣、叶片、果籽数大多与斐波那契数列相吻合.

讨论题

请查阅资料，搜集自然界中与斐波那契数列规律有关的实例，并与同学交流.

复习题

A 组

1. 已知在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3=2$，$a_7=1$，又数列 $\{\frac{1}{a_n+1}\}$ 为等差数列，则 $a_{11}=$（　　）.

（A）0　　（B）$\frac{1}{2}$　　（C）$\frac{7}{3}$　　（D）-1

2. 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列，①$\{a_n^2\}$ 是等比数列；②$\{a_{2n}\}$ 是等比数列；③$\{\frac{1}{a_n}\}$ 是等比数列；④$\{\lg a_n\}$ 是等差数列．则上述判断中正确的个数是（　　）.

（A）4　　（B）3　　（C）2　　（D）1

3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，

（1）已知 $a_2+a_3+a_{23}+a_{24}=48$，求 a_{13}；

（2）已知 $a_2+a_3+a_4+a_5=34$，$a_2a_5=52$，求公差 d.

4. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_2a_8=36$，$a_3+a_7=15$，求公比 q.

5. 在数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=3$，$a_{n+1}=a_n+2^n$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n.

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=\sqrt{2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$，写出它的前 8 项，并求它的前 100 项的和 S_{100}.

7. 在等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 中，$a_1=25$，$b_1=75$，$a_{101}+b_{101}=1900$，求数列 $\{a_n+b_n\}$ 的前 10 项和.

8. 用数学归纳法证明：n^2+5n 能被 6 整除.

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n=2n-a_n$，$n\in\mathbf{N}^*$，先计算数列的前 4 项，然后猜想 a_n 的表达式，并用数学归纳法证明.

B 组

1. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n-(-1)^n$，写出数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项，并求它的前 100 项的和 S_{100}.

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$.

（1）证明：对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，$a_n-a_{n+1}>0$；

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

3. 在数列 $\{a_n\}$ 中，设 $T_1=a_1+a_2+a_3$，$T_2=a_4+a_5+a_6$，$T_3=a_7+a_8+a_9$.

（1）若数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，求证：T_1，T_2，T_3 成等比数列，并求这个数列的公比；

（2）推广上述结论，并加以证明.

4. 某同学为筹集上大学的费用，向银行贷款若干元，这笔贷款按复利计算，年利率为 $q\,(0<q<1)$．据他估算，贷款后每年偿还 a 元，10 年可还清.

（1）求贷款金额；

（2）若贷款后前 4 年不偿还，从大学毕业后（即从第 5 年开始），每年偿还 a 元，仍在贷款后 10 年还清，试问，贷款金额要比原贷款金额少多少元？

5. 设$\{a_n\}$是一个等差数列，$\{b_n\}$是一个等比数列.

（1）若$a_{10}=0$，试证：当$n<19$时，必有$a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1+a_2+\cdots+a_{19-n}$；

（2）对等比数列$\{b_n\}$，类似的结论是什么？证明你的结论.

6. 用数学归纳法证明不等式：$\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{3n+1}\geqslant 1$（$n\in\mathbf{N}^*$）.

7. 已知数列$\{a_n\}$各项均为正数，且$a_{n+1}\leqslant a_n-a_n^2$. 用数学归纳法证明：对一切$n\in\mathbf{N}^*$且$n\geqslant 2$，都有$a_n\leqslant\dfrac{1}{n+2}$.

思考与实践

1. 通过查阅资料和到银行咨询，了解关于存款方式和存款利率方面的信息. 以每月存1 000元，6年后取出为例，利用所学的数学知识，探讨按现在的利率标准可能得到的最大收益.

2. 网上购鞋常常看到下面的表格.

脚长与鞋号对应表

脚长 a_n/mm	220	225	230	235	240	245	250	255	260	265
鞋号 b_n	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43

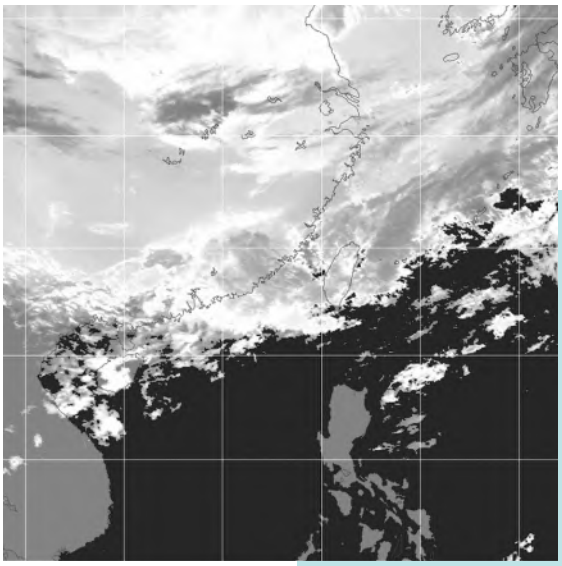
请解决下面的问题：

（1）找出满足表中对应规律的计算公式，通过实际脚长a计算出鞋号b；

（2）根据计算公式，计算30号童鞋所对应的脚长；

（3）如果一个篮球运动员的脚长为282 mm，根据计算公式，他该穿多大号的鞋？

第2章 一元函数导数及其应用



2.1　导数的概念及其意义

阅读与讨论：导数漫谈

2.2　导数的运算

2.3　导数在研究函数中的应用

阅读与讨论：哪个模型更合理

复习题

思考与实践

函数反映的是变量与变量之间相互对应的关系，但要进一步研究变量的变化规律，我们已学的关于函数的知识是不够的．比如，在实践中，我们常常遇到下面几类问题：求物体在任意时刻的速度；求曲线上某一点处的切线；求函数的最大值与最小值．这时就有必要引入反映函数变化率的概念，它就是本章要介绍的导数．导数是微积分中的核心概念之一．

微积分有一套便于运用的计算公式和计算法则，不仅在各项工程技术中得到有效应用，而且在自然科学、社会科学和人文科学等领域也有着广泛的应用．

本章中，我们将跨入微积分的大门，学习一元函数导数的概念及运算，初步领略导数在研究函数和解决实际问题中的重要性与简捷性．

2.1 导数的概念及其意义

2.1.1 平均变化率

在物理学中，可以用平均速度描述物体运动的快慢程度. 我们把物体的位移 s 作为时间 t 的函数，设这个函数为 $s=s(t)$，则物体由时刻 t_0 到时刻 t 的平均速度表示为

$$\overline{v}=\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0},$$

其中，$s(t_0)$ 和 $s(t)$ 分别表示物体在时刻 t_0 和 t 时的位移. 事实上，这里物体运动的平均速度就是其位移对时间的平均变化率.

例1 人们发现，在 10 m 高台跳水运动中，运动员相对于水面的高度 h（单位：m）与起跳后的时间 t（单位：s）存在函数关系

$$h=h(t)=-4.9t^2+6.5t+10.$$

试分别求该运动员在时间段[1，2]和[2，3]上的平均速度.

解 运动员在时间段[1，2]上的平均速度

$$\overline{v_1}=\frac{h(2)-h(1)}{2-1}=-8.2(\text{m/s}),$$

运动员在时间段[2，3]上的平均速度

$$\overline{v_2}=\frac{h(3)-h(2)}{3-2}=-18(\text{m/s}).$$

可以看出，运动员在不同时间段上的平均速度是不同的.

类似地，在物理学中，由于热胀冷缩，细杆状物体的长度 l（单位：m）是温度 t（单位:℃）的函数. 设这个函数为 $l=l(t)$，则规定

$$\overline{k}=\frac{l(t)-l(t_0)}{t-t_0}$$

为物体的平均线膨胀系数，其中，$l(t_0)$ 和 $l(t)$ 分别表示在温度 t_0 和 t 时物体的长度. 这里细杆状物体的平均线膨胀系数也是其长度对温度的平均变化率.

例2 一个精密的金属细棒的长度 l（单位：m）与温度 t（单位:℃）之间的函数关系为

$$l=l(t)=10^{-5}(t^2+t+1).$$

试分别求当温度从 79℃上升到 80℃以及当温度从 80℃上升到 81℃时该细棒的平均线膨胀系数.

解 当温度从 79℃上升到 80℃时，该细棒的平均线膨胀系数

$$\overline{k_1}=\frac{l(80)-l(79)}{80-79}=1.60\times10^{-3}.$$

当温度从 80℃上升到 81℃时，该细棒的平均线膨胀系数

$$\overline{k_2}=\frac{l(81)-l(80)}{81-80}=1.62\times10^{-3}.$$

同样可以看出，金属细棒的平均线膨胀系数在不同的温度下是不同的.

以上两例都是求函数平均变化率的问题.

设函数 $y=f(x)$ 定义在区间 I 上，对于 x_1，$x_2\in I$，我们称

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

为函数 $y=f(x)$ 从 x_1 到 x_2 的平均变化率.

习惯上，用 Δx 表示 x_2-x_1，即

$$\Delta x=x_2-x_1,$$

Δx 可以看成是 x_2 相对于 x_1 的一个改变量或增量（可以为正，也可以为负），此时 x_2 可以用 $x_1+\Delta x$ 代替；类似地，把函数相应的改变量或增量记为 Δy，即

$$\Delta y=f(x_2)-f(x_1).$$

Δx 是一个整体符号，不是 Δ 与 x 相乘.

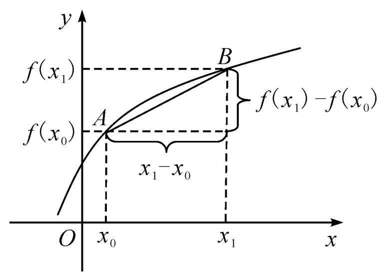
于是，平均变化率又可以表示为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}.$$

练习

1. 试写出例 1 中当时间从 t_1 到 t_2 时跳水运动员的平均速度.
2. 求下列函数分别在 $[1, 3]$，$[1, 2]$ 和 $[1, 1+t]$ 上的平均变化率：

 (1) $f(x)=6x-2$；　　(2) $f(x)=x^2+1$.
3. 观察函数 $y=f(x)$ 的图象，试说出函数从 x_0 到 x_1 的平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ 的几何意义.



（第 3 题图）

2.1.2 导数的概念

在分析物体的变速运动问题时，人们发现，仅仅知道物体在某一时间段内的平均速度是远远不够的，有时还需要知道物体在某一时刻的瞬时速度.

如何理解瞬时速度？它与平均速度有什么关系？下面我们通过前一节的例 1 加以分析.

我们来求 10 m 高台跳水运动员在 $t=2$ s 时的瞬时速度.

我们把运动员在时间段 $[2, 2+\Delta t]$ $(\Delta t>0)$ 或者 $[2+\Delta t, 2]$ $(\Delta t<0)$ 上的运动近似地看作匀速直线运动，并把平均速度

$$\bar{v}=\frac{h(2+\Delta t)-h(2)}{\Delta t}=-13.1-4.9\Delta t$$

近似地看作运动员在 $t=2$ s 时的瞬时速度.

记 $\Delta h=h(2+\Delta t)-h(2)$，$\Delta h$ 是运动员从 $t=2$ 到 $t=2+\Delta t$ 这段时间的位移改变量，$\bar{v}=\frac{\Delta h}{\Delta t}$ 就是 $h(t)$ 在 2 到 $2+\Delta t$ 这段时间内随时间 t 变化的一个平均变化率，它是运动员在

$t=2\,\mathrm{s}$ 时瞬时速度的一个近似值.

我们现在取越来越趋近于 0 的 Δt，观察平均变化率$\bar{v}$的变化情况，有关数据如下表：

时间段	时间改变量 Δt	平均速度$\bar{v}$	时间段	时间改变量 Δt	平均速度$\bar{v}$
[2，2.1]	0.1	−13.59	[1.9，2]	−0.1	−12.61
[2，2.01]	0.01	−13.149	[1.99，2]	−0.01	−13.051
[2，2.001]	0.001	−13.104 9	[1.999，2]	−0.001	−13.095 1
[2，2.000 1]	0.000 1	−13.100 49	[1.999 9，2]	−0.000 1	−13.099 51
[2，2.000 01]	0.000 01	−13.100 049	[1.999 99，2]	−0.000 01	−13.099 951
…	…	…	…	…	…

由此表可以看出，$\bar{v}$与 Δt 有关，它随着 Δt 的变化而变化. 当 Δt 越来越趋近于 0 时，$\bar{v}$ 越来越趋近于常数 $-13.1\,\mathrm{m/s}$. 因此，可以认为运动员在 $t=2\,\mathrm{s}$ 时的瞬时速度为 $-13.1\,\mathrm{m/s}$.

如果把运动员在 $t=2\,\mathrm{s}$时的瞬时速度记为 $v(2)$，则 $v(2)=-13.1\,\mathrm{m/s}$.

也就是说，当时间改变量 Δt 趋近于 0 时，运动员运动的平均速度趋近于瞬时速度. 如果将速度视为位移对时间的变化率，那么上述情况反映了平均变化率趋近瞬时变化率的过程.

$t=2\,\mathrm{s}$ 时的瞬时速度 $v(2)=-13.1\,\mathrm{m/s}$，能精确地反映运动员在 $t=2\,\mathrm{s}$ 时的运动状况.

我们知道，物体运动的平均速度是其位移对时间的平均变化率；相应地，物体运动的瞬时速度就是其位移对时间的瞬时变化率.

同样地，细杆状物体的平均线膨胀系数也是其长度对温度的平均变化率；相应地，细杆状物体在某一温度下的线膨胀系数就是其长度对温度的瞬时变化率.

上述问题都涉及了函数在某一点处的瞬时变化率.

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 附近有定义，当 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，函数 $y=f(x)$ 也有一个增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

它们的比

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

为当 x 从 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 时函数 $y=f(x)$ 的平均变化率.

如果当 Δx 无限趋近于 0 时，比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 无限趋近于一个常数 A，则称 $f(x)$ 在 x_0 处有导数(或称 $f(x)$ 在 x_0 处可导)，并称该常数 A 为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的**导数**(derivative)，记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$，即 $f'(x_0)=y'|_{x=x_0}=A$.

若用符号“→”表示“无限趋近于”，则“当 Δx 无限趋近于 0 时，$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 无限趋近于常数 A”就可以表示为“当 $\Delta x\to 0$ 时，$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\to A$”.

我们称这个确定的常数 A 为当 $\Delta x\to 0$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 的极限，并记为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$.

根据导数的定义，跳水运动员的高度 h 对时间 t 的导数是运动员的瞬时速度，细棒的长度 l 对温度 t 的导数就是该细棒的线膨胀系数. 汽车速度表上每一时刻显示的速度读数，就是汽车在该时刻的瞬时速度，即该时刻汽车的位移 s 对时间 t 的导数.

例1 设 $f(x)=x^2$，

(1) 求 $f'(1)$；

(2) 设 $a\in\mathbf{R}$，求 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的导数.

解 记 $y=f(x)$，

(1) 因为

$$f(1+\Delta x)-f(1)=(1+\Delta x)^2-1^2=(\Delta x)^2+2\Delta x,$$

所以

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\Delta x+2.$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta x+2\to 2$，所以 $f'(1)=2$.

(2) 因为

$f(a+\Delta x)-f(a)=(a+\Delta x)^2-a^2=(\Delta x)^2+2a\Delta x$,

所以

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\Delta x+2a.$$

当 $\Delta x \to 0$ 时，$\Delta x+2a \to 2a$，所以 $f'(a)=2a$.

在例 1 中，对于每一个 $a \in \mathbf{R}$，都对应一个确定的导数 $f'(a)=2a$，于是 $f'(a)$ 是 a 的函数.

一般地，如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内任一点都可导，则对每一个 $x_0 \in (a, b)$，都对应着一个确定的导数值 $f'(x_0)$，从而，当 x 变化时，$f'(x)$ 是 x 的函数，我们称这个函数 $f'(x)$ 为 $y=f(x)$ 在 (a, b) 内的**导函数**，简称为**导数**. $y=f(x)$ 的导函数有时也记为 y'.

> 若函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内每一点 x_0 都有导数 $f'(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 (a, b) 上可导，也称函数 $f(x)$ 是 (a, b) 上的**可导函数**.

显然，若 $x_0 \in (a, b)$，则函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是导函数 $f'(x)$ 在 x_0 处的函数值.

例 2 已知函数 $f(x)=-x^2+x$，求：

(1) $f'(x)$;　　(2) $f'(1)$, $f'(-1)$.

解 (1) 因为

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\&=\frac{[-(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)]-(-x^2+x)}{\Delta x}\\&=-\Delta x+(1-2x),\end{aligned}$$

当 $\Delta x \to 0$ 时，$-\Delta x+(1-2x) \to 1-2x$，所以 $f'(x)=1-2x$.

(2) $f'(1)=1-2\times 1=-1$;

$f'(-1)=1-2\times(-1)=3$.

练习

1. 一物体做自由落体运动，位移 s(单位：m) 与时间 t(单位：s) 的关系为 $s=s(t)=4.9t^2$，求：

(1) 物体在时间段 $[2, 2+\Delta t]$ 上的平均速度；

(2) 物体在 $t=2$ 时的瞬时速度及 $t=t_0$ 时的瞬时速度.

2. 已知函数 $f(x)=x^2-1$，求：

（1）$f'(x)$；　　（2）$f'(0)$，$f'(1)$，$f'(2)$.

3. 求下列函数的导函数：

（1）$y=1-2x$；　　（2）$y=x-x^2$.

2.1.3 导数的几何意义

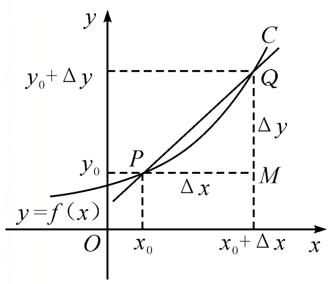


图 2-1

前面我们已经学习了导数的概念，现在我们来研究导数的几何意义.

如图 2-1，设曲线 C 是函数 $y=f(x)$ 的图象，点 $P(x_0, y_0)$ 是曲线 C 上一定点，$Q(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ 是曲线 C 上邻近点 P 的任一点，我们称直线 PQ 为曲线 C 的割线.

根据两点连线斜率的计算公式，可知

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{(x_0+\Delta x)-x_0}$$

为 P，Q 两点连线的斜率，即割线 PQ 的斜率，记为 k_{PQ}.

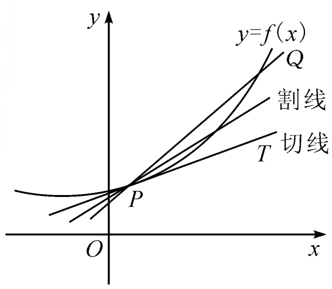


图 2-2

如图 2-2，观察当点 Q 沿曲线 C 无限趋近于点 P 时（即 $\Delta x\to 0$）割线 PQ 的变化情况. 不难发现：当点 Q 沿曲线 C 逐渐向点 P 趋近时，割线 PQ 将绕着点 P 转动. 当点 Q 沿着曲线 C 无限趋近点 P 时，如果割线 PQ 无限趋近确定的直线 PT，那么称这条直线 PT 为曲线 C 在点 P 处的切线.

一条直线与曲线仅有一个公共点，则这条直线是这条曲线的切线. 这一说法对吗？

如果曲线 C 在点 P 处的切线的斜率存在，我们设它为 k，那么，当 $\Delta x\to 0$ 时，割线 PQ 的斜率

$$k_{PQ}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{(x_0+\Delta x)-x_0}\to k.$$

根据导数的定义及上述求 k 的过程可知，如果曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率存在，则它就是函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数，即 $k=f'(x_0)$. 换句话说，函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率，这就是导数的几何意义.

根据直线的点斜式方程可知，曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，即

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).$$

例1 已知曲线 $y=x^2$ 上一点 $P(1, 1)$，试求这条曲线在点 P 处的切线方程.

解 设 $f(x)=x^2$，因为

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}\\&=\frac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x}\\&=2+\Delta x,\end{aligned}$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，$2+\Delta x\to 2$，所以 $f'(1)=2$.

根据导数的几何意义，曲线 $y=x^2$ 在点 $P(1, 1)$ 处的切线斜率为 $f'(1)=2$. 因此，切线方程为

$$y-1=2(x-1),$$

即 $y=2x-1$.

例2 已知曲线 $y=x^2+1$，试在这条曲线上找一点 P，使得曲线在点 P 处的切线平行于直线 $y=2x-1$.

解 设 $f(x)=x^2+1$，点 P 的坐标为 (x_0, x_0^2+1)，因为

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\\&=\frac{[(x_0+\Delta x)^2+1]-(x_0^2+1)}{\Delta x}\\&=\Delta x+2x_0,\end{aligned}$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta x+2x_0\to 2x_0$，所以 $f'(x_0)=2x_0$.

根据导数的几何意义，曲线在点 P 处的切线斜率 $k=f'(x_0)=2x_0$.

又曲线在点 P 处的切线平行于直线 $y=2x-1$，所以 $k=2$，即 $2x_0=2$，解得 $x_0=1$. 所以，曲线上所要找的点为 $P(1, 2)$.

练习

1. 求曲线 $y=-x^2$ 在点 $P(-1,\ -1)$ 处的切线方程.
2. 已知曲线 $y=x^2$，试在这条曲线上找一点 P，使曲线在点 P 处的切线平行于直线 $y=2x+1$，并求出曲线在点 P 处的切线方程.

习题 2.1

1. 一物体做自由落体运动，位移与时间的关系为 $s=s(t)=4.9t^2$，分别求出该物体在时间段 $[1.9,\ 2]$，$[2,\ 2.1]$ 和 $[2,\ 2+\Delta t]$ 上的平均速度.
2. 我们知道，正方形的面积 S 为边长 a 的平方，求：
   (1) 边长 a 从 0 到 1 时面积 S 的平均增长率；
   (2) 边长 a 从 a_0 到 $a_0+\Delta x$ 时面积 S 的平均增长率.
3. 将一个小球从桥上抛向空中，t s 后小球相对于地面的高度为 $h(t)=-2t^2+20t+12$（单位：m）.
   (1) 求小球从 2 s 到 $(2+\Delta t)$ s 时的平均速度；
   (2) 求小球在第 2 s 时的瞬时速度.
4. 已知函数 $f(x)=x^3-1$，求：
   (1) $f'(x)$； (2) $f'(-1)$，$f'(0)$，$f'(1)$； (3) $f'(a+1)$.
5. 求下列函数的导函数：
   (1) $y=x^2+1$； (2) $y=(x+1)^2$.
6. 求曲线 $y=2x^2$ 在点 $P(1,\ 2)$ 处的切线斜率及切线方程.
7. 曲线 $y=1-x^2$ 在点 P 处的切线斜率为 2，求切线的方程.
8. 已知曲线 $y=x^2-1$ 在其上一点 $P\left(\frac{1}{2},\ -\frac{3}{4}\right)$ 处的切线为 l，试在曲线上找一点 Q，使得曲线在点 Q 处的切线与直线 l 垂直.

阅读与讨论

导数漫谈

微积分的出现是数学乃至整个科学的一次伟大革命，谱写了人类思想的新篇章. 这并不是一句空话，而是实实在在的历

史事实．发生在17世纪的那次科学革命，以牛顿力学的创立为重要标志．牛顿于1687年发表的科学名著《自然哲学的数学原理》，向人们昭示近代科学的一项重大胜利，即对机械运动的规律有了完整的理解．而这项重大胜利，从某种意义上讲是由我们刚刚学过的导数引发出来的．

17世纪前后，科学家们研究的著名问题有：如何确定机械运动的瞬时速度和加速度，如何作出曲线的切线，如何求函数的极大或极小值，如何描述运动的轨迹．可以这样说，现在中学生所学的一些数学和物理知识，几乎全是当时最“尖端”的科学问题．

我们不妨从质点的运动谈起，设一个质点沿着一条直线运动，其位移 s 是时间 t 的函数 $s=s(t)$．我们很容易计算这个质点从时刻 t_0 到时刻 $t_0+\Delta t$ 的平均速度 v，当 $\Delta t\to 0$ 时，就得到这个质点在时刻 t_0 的瞬时速度 $v(t_0)$，它就是位移 $s(t)$ 对时间 t 在 t_0 处的导数．通常速度 $v(t)$ 仍然是时间 t 的函数．

如果质点的运动是变速的，人们就把速度 $v(t)$ 对时间 t 的变化率叫作加速度．为了求加速度，我们还是先计算这个质点从时刻 t_0 到时刻 $t_0+\Delta t$ 的平均加速度 a，当 $\Delta t\to 0$ 时，就得到这个质点在时刻 t_0 的瞬时加速度 $a(t_0)$，它就是速度 $v(t)$ 对时间 t 在 t_0 处的导数．这样一来，加速度 $a(t)$ 是位移 $s(t)$ 对时间 t 的导数 $v(t)$ 的导数．通常加速度 $a(t)$ 也仍然是时间 t 的函数．当然还可以继续讨论 $a(t)$ 的变化率的问题．

在数学中，我们称函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 的导数为函数 $f(x)$ 的二阶导数，并记为 $f''(x)$．那么，加速度 $a(t)$ 是位移 $s(t)$ 对时间 t 的导数 $v(t)$ 的导数，可以表示为

$$s'(t)=v(t),\ s''(t)=v'(t)=a(t).$$

于是，著名的牛顿第二定律 $F=m\times a(t)$ 可以表示为

$$F=m\times s''(t). \quad ①$$

牛顿那个时代，科学研究的重大问题之一是：如果外力是已知的，怎样求未知的位移？譬如，根据牛顿的万有引力定律，知道太阳对某个行星的引力，如何求该行星的运动轨道呢？牛顿将这个问题化成一个类似于①而又比它复杂得多的方程．由于这样的方程含有未知函数及其导数，所以称之为微分

方程．通过求解微分方程，恰好可以解决上述问题．令人吃惊的是，后人用这种方法发现了当时的新的行星——天王星和海王星．不但天体的运动可以如此刻画，而且落体运动、斜抛运动、摆的运动也服从类似的规律．

我们完全可以说，牛顿力学的伟大功绩在于它把机械运动的理论给数学化了，而数学化主要是将一个科学问题化为求解微分方程的问题．此后，人们又研究了空气的流动、声音的传播、热的传导以及人口的增长等问题，并且发现了刻画它们的微分方程或微分方程组．比如，19 世纪麦克斯韦发现全部电磁现象都可归结为一组微分方程，现在称之为麦克斯韦方程．更了不起的是，不论是造船、造火箭，还是研究电磁通信、发射人造卫星，都离不开这些理论．可以毫不夸张地说，这些理论是整个人类文明不可缺少的重要基石之一，而它们使用的基本概念就是导数及其衍生的概念．

如果要问学习导数有什么意义？那么我们至少可以这样回答：

它是入场券，凭此你可以步入科学的殿堂；

它是语言，凭此你可以与牛顿、麦克斯韦等科学巨匠对话；

它是工具，凭此你可以参与建设人类美好生活的伟大事业．

讨论题

经济领域中，经常用到年产量的变化率、成本的平均变化率等概念．进行经济分析时，经济函数的变化率（因变量对自变量的导数）通常称为“边际”．在经济学中，把研究一种可变因素的数量变动会对其他可变因素的变动产生多大影响的方法，称为边际分析法．这种方法通过运用导数知识研究经济运行中微增量的变化，用以分析各经济变量之间的相互关系及变化过程．它广泛运用于经济行为和经济变量的分析过程，如对效用、成本、产量、收益、利润、消费、储蓄、投资、要素效率等的分析．

请查阅相关资料，了解边际成本、边际收入、边际利润等概念的含义，并通过实例说明这些概念的经济意义．

2.2 导数的运算

根据导数的定义求函数的导数，我们可以采取以下步骤：

(1) 求函数 $y=f(x)$ 的增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$；

(2) 求平均变化率

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x};$$

(3) 观察当 $\Delta x\to 0$ 时 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 是否与某确定的值 $A(x)$ 无限接近. 如果是，则这个值 $A(x)$ 就是所求的导数 $f'(x)$，即

$$f'(x)=A(x).$$

但在实际操作时，我们并不会总这样做. 因为，对每一个函数都这样重复一次就太繁琐了. 为此，我们尽可能地求得一些基本初等函数的求导公式和求导法则，以便根据它们方便、直接地计算出更多的函数的导数.

2.2.1 常见函数的导数

设 $y=f(x)=c$，因为

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=c-c=0,$$

所以

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0}{\Delta x}=0.$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}\to 0$. 所以 $f'(x)=0$.

下面探求函数 $y=x^n$ 的求导公式，我们仅就 $n=1$，2，3，-1，$\frac{1}{2}$ 的情形给出讨论.

(1) 当 $n=1$ 时，设 $f(x)=x$，因为

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)-x=\Delta x,$$

所以

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=1.$$

当 $\Delta x \to 0$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 1$，所以 $f'(x)=1$.

(2) 当 $n=2$ 时，设 $f(x)=x^2$，因为

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2,$$

所以

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x.$$

当 $\Delta x \to 0$ 时，$2x+\Delta x \to 2x$，所以 $f'(x)=2x$.

(3) 当 $n=3$ 时，设 $f(x)=x^3$，因为

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x+\Delta x)-f(x)\\ &=(x+\Delta x)^3-x^3\\ &=3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3,\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=3x^2+3x(\Delta x)+(\Delta x)^2.$$

当 $\Delta x \to 0$ 时，$3x^2+3x(\Delta x)+(\Delta x)^2 \to 3x^2$，所以 $f'(x)=3x^2$.

(4) 当 $n=-1$ 时，设 $f(x)=\frac{1}{x}$，因为

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=-\frac{\Delta x}{x^2+x\Delta x},$$

所以

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x^2+x\Delta x}.$$

当 $\Delta x \to 0$ 时，$-\frac{1}{x^2+x\Delta x} \to -\frac{1}{x^2}$，所以 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

(5) 当 $n=\frac{1}{2}$时，设 $f(x)=\sqrt{x}$，因为

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}=\frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}},$$

所以

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}.$$

当 $\Delta x \to 0$ 时，$\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} \to \frac{1}{2\sqrt{x}}$，所以 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

以上求导公式可以归纳列表如下：

函数	$y=c$	$y=x$	$y=x^2$	$y=x^3$	$y=\frac{1}{x}$	$y=\sqrt{x}$
导函数	$y'=0$	$y'=1$	$y'=2x$	$y'=3x^2$	$y'=-\frac{1}{x^2}$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

观察求导公式，你能发现什么规律?

练习

1. 填表：

	$y=c$	$y=x$	$y=x^2$	$y=x^3$
$y'\|_{x=-1}$				
$y'\|_{x=0}$				
$y'\|_{x=1}$				
$y'\|_{x=\sqrt{2}}$				

2. (1) 已知 $f(x)=\frac{1}{x}$，求 $f'(-1)$，$f'(1)$ 及 $f'(\sqrt{2})$；

(2) 已知 $f(x)=\sqrt{x}$，求 $f'(1)$，$f'(2)$.

3. 已知物体的位移 s 与时间 t 的关系为 $s=\sqrt{t}$，求 $t=1$ 时物体的瞬时速度.

根据导数的定义，对于基本初等函数，可以得到下面的导数公式表.

基本初等函数的导数公式

(1) 若 $f(x)=c$ (c 为常数)，则 $f'(x)=0$；

(2) 若 $f(x)=x^{\alpha}$ (α 为非零有理数)，则 $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$；

(3) 若 $f(x)=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$)，则 $f'(x)=a^x\ln a$；

特别地，若 $f(x)=\mathrm{e}^x$，则 $f'(x)=\mathrm{e}^x$；

(4) 若 $f(x)=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$)，则 $f'(x)=\frac{1}{x\ln a}$；

特别地，若 $f(x)=\ln x$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}$；

(5) 若 $f(x)=\sin x$，则 $f'(x)=\cos x$；

(6) 若 $f(x)=\cos x$，则 $f'(x)=-\sin x$.

例1 求下列函数在给定点处的导数：

（1）$f(x)=x\sqrt{x}$，$x=1$；

（2）$f(x)=\log_2 x$，$x=2$.

解 （1）$f(x)=x^{\frac{3}{2}}$，根据幂函数的求导公式，有

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}},$$

所以

$$f'(1)=\frac{3}{2}.$$

（2）根据对数函数的求导公式，有

$$f'(x)=\frac{1}{x\ln 2},$$

所以

$$f'(2)=\frac{1}{2\ln 2}.$$

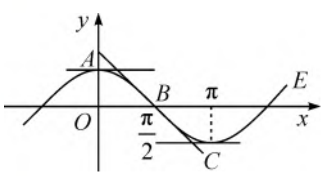


图 2-3

例2 设函数 $y=\cos x$ 的图象为曲线 E（如图 2-3），试分别求此曲线在点 $A(0, 1)$，$B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$，$C(\pi, -1)$处的切线方程.

解 $y'=-\sin x$. 设曲线 E 在点 A，B，C 处切线的斜率分别为 k_A，k_B，k_C. 由导数的几何意义，得

$$k_A=-\sin 0=0,$$

$$k_B=-\sin\frac{\pi}{2}=-1,$$

$$k_C=-\sin\pi=0.$$

于是，曲线 E 在点 A 处的切线方程为 $y-1=k_A(x-0)$，即 $y=1$；

曲线 E 在点 B 处的切线方程为 $y-0=k_B\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$，即 $y=-x+\frac{\pi}{2}$；

曲线 E 在点 C 处的切线方程为 $y+1=k_C(x-\pi)$，即 $y=-1$.

练习

1. 在横线上分别填写下列函数的导数：

$(x^{\frac{2}{3}})'=$________；　　$\left(\frac{1}{x}\right)'=$________；　　$(2^x)'=$________；

$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)'=$________；　　$(\log_2 x)'=$________；　　$(\log_{\frac{1}{2}} x)'=$________.

2. 利用导数公式求下列函数的导数：

(1) $y=\log_{\sqrt{e}} x$；　　(2) $y=e^{2x}$.

3. 已知曲线 $y=x^3$，求此曲线在点 $Q(-1, -1)$ 处的切线方程.

4. 已知曲线 C 为函数 $y=e^x$ 的图象，分别求此曲线在点 $A(0, 1)$，$B(1, e)$ 处的切线方程.

2.2.2 导数的运算法则

1. 函数之和（差）的导数

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 是两个可导函数，现在我们来求 $y=F(x)=f(x)+g(x)$ 的导数.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

$$=\frac{f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-[f(x)+g(x)]}{\Delta x}$$

$$=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}.$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\to f'(x),$$

$$\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\to g'(x),$$

所以

$$F'(x)=f'(x)+g'(x).$$

上式也可写为

$$[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x).$$

类似地，可以得到

$$[f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x).$$

于是我们得到函数之和（差）的求导法则：

$$[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x).$$

一般地，任意有限个可导函数的和与差的导数，等于每个函数的导数的和与差.

例1 求函数 $y=x+\cos x$ 在 $x=0$ 处的导数.

解 根据函数之和的求导法则，有

$$y'=x'+(\cos x)'=1-\sin x,$$

所以

$$y'|_{x=0}=(1-\sin x)|_{x=0}=1.$$

2. 函数乘积的导数

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 是两个可导函数，$y=F(x)=f(x)g(x)$，则

$$\begin{aligned}\Delta y&=F(x+\Delta x)-F(x)\\&=f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)\\&=[f(x+\Delta x)-f(x)]g(x+\Delta x)+f(x)[g(x+\Delta x)-g(x)],\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot g(x+\Delta x)+f(x)\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}.$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\to f'(x),\quad \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\to g'(x),$$

$$g(x+\Delta x)\to g(x),$$

所以

$$F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

于是我们得到函数乘积的求导法则：

$$[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

例2 求下列函数的导数：

(1) $y=x\ln x$；

(2) $y=e^x\sin x$.

解　(1) 根据函数乘积的求导法则，有

$$y'=x'\ln x+x(\ln x)'$$
$$=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}$$
$$=\ln x+1.$$

(2) 根据函数乘积的求导法则，有

$$y'=(e^x)'\sin x+e^x(\sin x)'$$
$$=e^x\sin x+e^x\cos x$$
$$=e^x(\sin x+\cos x).$$

若 c 为常数，$f(x)$ 为可导函数，根据函数乘积的求导法则，有

$$[cf(x)]'=c'f(x)+cf'(x)=cf'(x).$$

这表明，若 c 为常数，$f(x)$ 为可导函数，则有

$$[cf(x)]'=cf'(x).$$

若 c_1，c_2 为两个常数，$f(x)$，$g(x)$ 是两个可导函数，则有

$$[c_1f(x)+c_2g(x)]'=c_1f'(x)+c_2g'(x).$$

例3　求函数 $y=(x^2+1)(2x-3)$ 的导数.

解　方法一：

$$y'=(x^2+1)'(2x-3)+(x^2+1)(2x-3)'$$
$$=[(x^2)'+1'](2x-3)+(x^2+1)[(2x)'-3']$$
$$=2x(2x-3)+(x^2+1)\cdot 2$$
$$=6x^2-6x+2.$$

方法二：因为

$$y=(x^2+1)(2x-3)$$
$$=2x^3-3x^2+2x-3,$$

所以

$$y'=(2x^3)'-(3x^2)'+(2x)'-(3)'$$
$$=2\cdot 3x^2-3\cdot 2x+2-0$$
$$=6x^2-6x+2.$$

练习

1. 求下列函数的导数：

(1) $y=x^2+x$；　(2) $y=e^x-e^{-x}$；

(3) $y=x^3+\ln x$；　(4) $y=\sin x+\cos x$.

2. 求下列函数的导数：

(1) $y=xe^x$；　(2) $y=x^2\ln x$；　(3) $y=e^x\cos x$.

3. 求曲线 $y=-x^3+2x^2-x+1$ 在点 $P(0,1)$ 处的切线的方程.

3. 函数的商的导数

设函数 $f(x)$，$g(x)$ $(g(x)\neq 0)$ 是两个可导函数，$y=F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，则

$$\begin{aligned}\Delta y&=F(x+\Delta x)-F(x)\\&=\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}\\&=\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)}\\&=\frac{[f(x+\Delta x)-f(x)]g(x)-f(x)[g(x+\Delta x)-g(x)]}{g(x+\Delta x)g(x)},\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot g(x)-f(x)\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right].$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\to f'(x),$$

$$\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\to g'(x),$$

$$g(x+\Delta x)\to g(x).$$

所以

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}.$$

于是我们得到函数的商的求导法则：

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}.$$

例4 求下列函数的导数：

（1）$y=\frac{e^x}{x}$；　　（2）$y=\tan x$.

解 根据函数商的求导法则，有

（1）
$$\begin{aligned} y'&=\frac{(e^x)'x-e^x x'}{x^2}\\ &=\frac{e^x x-e^x}{x^2}\\ &=\frac{(x-1)e^x}{x^2}. \end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned} y'&=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'\\ &=\frac{(\sin x)'\cdot\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}\\ &=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}\\ &=\frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

例5 求曲线 $y=\frac{\sin x}{x}$ 在点 $P(\pi,\ 0)$ 处的切线方程.

解 $y'=\frac{(\sin x)'x-x'\sin x}{x^2}=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，

所以

$$y'|_{x=\pi}=\frac{\pi\cos\pi-\sin\pi}{\pi^2}=-\frac{1}{\pi},$$

因此，所求的切线方程为 $y-0=-\frac{1}{\pi}(x-\pi)$，即

$$x+\pi y-\pi=0.$$

练习

1. 求下列函数的导数：

（1）$y=\frac{\cos x}{\sin x}$；（2）$y=\frac{\ln x}{x}$；（3）$y=\frac{x^2}{e^x}$；（4）$y=e^x\tan x$；（5）$y=\frac{xe^x}{x+1}$.

2. 一振动质点的位移 s（单位：cm）与时间 t（单位：s）的函数关系式为 $s=\frac{\sin t}{e^t}$，求 $t=0$ 时质点的瞬时速度.

4. 复合函数的导数

用基本初等函数的四则运算不能得到函数 $y=\ln(2x+1)$，那么怎样用基本初等函数得到函数 $y=\ln(2x+1)$ 呢？

我们可以记 $u=2x+1$，于是函数 $y=\ln(2x+1)$ 即为 $y=\ln u$. 这样，由 $y=\ln u$，$u=2x+1$ 就可得到 $y=\ln(2x+1)$. 此时，我们称 $y=\ln(2x+1)$ 是由 $y=\ln u$ 和 $u=2x+1$ 复合而成的复合函数.

一般地，对于两个函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$，如果通过变量 u，y 可以表示成 x 的函数，则称这个函数为函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的**复合函数**(composite function)，记作 $y=f(g(x))$.

复合函数 $y=f(g(x))$ 的导数和函数 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 的导数间的关系为

$$y_x'=y_u'\cdot u_x',$$

即 y 对 x 的导数等于 y 对 u 的导数与 u 对 x 的导数的乘积.

> y_x' 表示 y 对 x 的导数.

于是，函数 $y=f(g(x))$ 的导数为

$$[f(g(x))]'=f'(u)\cdot g'(x).$$

> 你能用导数的定义证明此法则吗？

由此可知，$y=\ln(2x+1)$ 对 x 的导数等于 $y=\ln u$ 对 u 的导数与 $u=2x+1$ 对 x 的导数的乘积，即

$$y_x'=y_u'\cdot u_x'=(\ln u)'\cdot(2x+1)'=\frac{1}{u}\cdot 2=\frac{2}{2x+1}.$$

例6 求下列函数的导数：

(1) $y=(x+1)^4$；(2) $y=e^{-x+1}$；(3) $y=\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{4}\right)$.

解 (1) 设 $u=x+1$，则 $y=(x+1)^4$ 是由 $y=u^4$ 与 $u=x+1$ 复合而成的.

根据复合函数的求导法则，得

$$y'=(u^4)'\cdot(x+1)'=4u^3\cdot 1=4(x+1)^3.$$

(2) 设 $u=-x+1$，则 $y=e^{-x+1}$ 是由 $y=e^u$ 与 $u=-x+1$ 复合而成的.

根据复合函数的求导法则，得

$$
\begin{aligned}
y' &= (e^u)' \cdot (-x+1)' \\
&= e^u \cdot (-1) \\
&= -e^u \\
&= -e^{-x+1}.
\end{aligned}
$$

(3) 设 $u=\pi x-\frac{\pi}{4}$，则 $y=\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{4}\right)$ 是由 $y=\sin u$ 与 $u=\pi x-\frac{\pi}{4}$ 复合而成的.

根据复合函数的求导法则，得

$$
\begin{aligned}
y' &= (\sin u)' \cdot \left(\pi x-\frac{\pi}{4}\right)' \\
&= (\cos u) \cdot \pi \\
&= \pi\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{4}\right).
\end{aligned}
$$

练习

1. 下列函数可看成哪两个函数复合而成的复合函数?

(1) $y=\sqrt{2x+1}$；　　(2) $y=\ln(x^2+1)$；　　(3) $y=\sin\frac{1}{x}$.

2. 求下列函数的导数：

(1) $y=(x+2)^{99}$；　　(2) $y=\sqrt{x+1}$；

(3) $y=\sin\frac{x}{3}$；　　(4) $y=\ln(ex+1)$.

习题 2.2

1. 根据导数的定义求下列函数的导数：

(1) $y=x^3+1$；　　(2) $y=\frac{1}{x+1}$；　　(3) $y=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

2. 利用导数公式求下列函数在给定点处的导数：

(1) $y=x^{\frac{2}{3}}$，$x=1$；　　(2) $y=10^x$，$x=1$；

(3) $y=\lg x$，$x=1$；　　(4) $y=\sin x$，$x=\pi$.

3. 试在曲线 $y=\sqrt{x}$ 上找一点 P，使曲线在点 P 处的切线的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$.

4. 已知曲线 E 为函数 $y=\ln x$ 的图象，分别求此曲线在点 $A(1,0)$，$B(e,1)$，$C\left(\frac{1}{e},-1\right)$ 处的切线方程.

5. 已知某导体中的电流 I（单位：A）与时间 t（单位：s）有关系式：$I=\sin t$，求 $t=\frac{\pi}{3}$ 时电流的瞬时变化率.

6. 求曲线 $y=\ln(2x-1)$ 在点 $P(1, 0)$ 处的切线方程.

7. 求下列函数的导数：

(1) $y=x^3-3^x$；　(2) $y=\sqrt{x}+\ln x$；　(3) $y=x^2\sin x$；

(4) $y=2^x\sin x$；　(5) $y=2x^3+3\log_2 x$；　(6) $y=e^x+2\cos x$；

(7) $y=(x^2+1)\sin x$；　(8) $y=(2x-3)\ln x$；　(9) $y=\frac{x^2}{x+1}$；

(10) $y=\frac{e^x}{x^2}$；　(11) $y=\sin x\tan x$；　(12) $y=\frac{\ln x+1}{x}$.

8. 求下列函数的导数：

(1) $y=(x-1)^{\frac{2}{3}}$；　(2) $y=x^3+(2x-1)^3$；

(3) $y=x+\ln(1-x)$；　(4) $y=\sin(x-1)+\cos(x+1)$.

9. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且满足 $f(x)=2xf'(1)+\ln x$，求 $f'(e)$.

10. 过坐标原点作一条直线与曲线 $y=e^x$ 相切，求切点的坐标.

2.3 导数在研究函数中的应用

自然界和社会生活中的许多现象都可以通过某个函数模型来刻画，要研究这些现象，就必须研究函数的性质，而导数为我们研究函数的性质提供了又一个重要工具.

2.3.1 导数与函数的单调性

我们再来研究本章 2.1.1 节的例 1.

跳水运动员的运动状态分为两个阶段：第一阶段，从起跳到最高点；第二阶段，从最高点到入水.

首先从导数的定义来看：第一阶段，跳水运动员离水面的高度 $h(t)$ 是单调递增的，相应地 $v(t)=h'(t)>0$；第二阶段，跳水运动员离水面的高度 $h(t)$ 是单调递减的，相应地 $v(t)=$

$h'(t)<0$.

再从导数的几何意义来看：我们作出函数 $h(t)=-4.9t^2+6.5t+10$ 的图象，如图 2-4.

在第一阶段，图象上各点处的切线是“左下右上”的，均有 $h'(t)>0$，即在各点附近函数均单调递增，$h(t)$ 在整个阶段单调递增；在第二阶段，图象上各点处的切线是“左上右下”的，均有 $h'(t)<0$，即在各点附近函数均单调递减，$h(t)$ 在整个阶段单调递减.

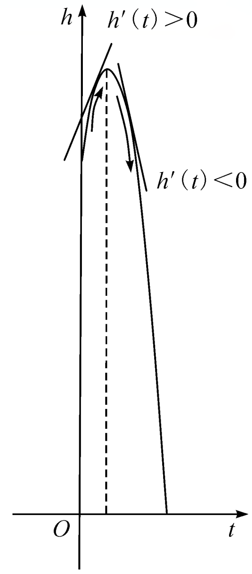


图 2-4

对于一般函数 $y=f(x)$，导数与函数的单调性有什么联系呢?

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 上是增(减)函数，那么，对于任意 x_1，$x_2\in(a, b)$，当 $x_1\neq x_2$ 时可知 x_1-x_2 与 $f(x_1)-f(x_2)$ 同(异)号，从而有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0\ (<0)$，即 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}>0\ (<0)$. 这表明，导数大于(小于)0 与函数单调递增(减)密切相关.

一般地，我们有如下结论：

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 上有导数 $f'(x)$，

如果在此区间上 $f'(x)>0$，那么函数 $y=f(x)$ 在此区间上单调递增；

如果在此区间上 $f'(x)<0$，那么函数 $y=f(x)$ 在此区间上单调递减.

(1) 如果在某区间上恒有 $f'(x)=0$，那么函数有何特征?

(2) 如果函数 $y=f(x)$ 在 (a, b) 上单调递增(减)，那么导数 $f'(x)$ 必定大于(小于)0 吗?

例1 求函数 $y=x^3-3x$ 的单调区间.

解 函数 $y=x^3-3x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，且

$$y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1).$$

由 $y'=0$ 得，$x=\pm1$.

结合导函数 y' 的图象可知：当 $x<-1$ 或 $x>1$ 时，$y'>0$；当 $-1<x<1$ 时，$y'<0$.

所以，函数 $y=x^3-3x$ 的单调递增区间是 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$，单调递减区间是 $(-1, 1)$.

例2 某商品的销售量 Q 与商品的单价 p 之间的关系可近似地用如下函数给出：

$$Q=15+6p-p^2 \quad (0<p<7).$$

(1) 求商品的销售额 R 与商品单价 p 之间的函数关系；

(2) 讨论商品的销售额随商品单价 p 变化的波动情况.

解 商品的销售额是商品的单价与商品的销售量的乘积，销售额的波动情况可用销售额函数的增减性来刻画.

(1) 根据商品销售额与商品单价及销售量之间的关系，得

$$R=pQ=-p^3+6p^2+15p \quad (0<p<7).$$

(2) $R'=-3p^2+12p+15=-3(p-5)(p+1)$.

当 $0<p<5$ 时，$R'>0$，R 是 p 的增函数；当 $5<p<7$ 时，$R'<0$，R 是 p 的减函数.

所以，当商品单价在 0 到 5 之间时，商品的销售额是随价格的上升而增加的；当商品单价大于 5 小于 7 时，商品的销售额是随价格的上升而减少的.

例3 求下列函数的单调区间：

(1) $y=x\mathrm{e}^x$；

(2) $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

解 (1) 函数定义域为 $(-\infty, +\infty)$，且

$$y'=\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x=(x+1)\mathrm{e}^x.$$

当 $x<-1$ 时，$y'<0$；当 $x>-1$ 时，$y'>0$.

所以，函数 $y=x\mathrm{e}^x$ 的单调递减区间是 $(-\infty, -1)$，单调递增区间是 $(-1, +\infty)$.

(2) 函数的定义域为 $(0, +\infty)$，且

$$y'=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

由 $y'=0$ 得 $x=\mathrm{e}$.

结合函数 $1-\ln x$ 的单调性得：当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$y'>0$；当 $x>\mathrm{e}$ 时，$y'<0$.

所以，函数 $y=\frac{\ln x}{x}$ 的单调递增区间是 $(0, \mathrm{e})$，单调递减区间是 $(\mathrm{e}, +\infty)$.

练习

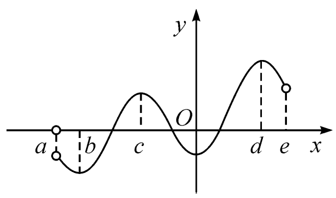
1. 确定下列函数的单调区间：

(1) $y=x-x^3$；

(2) $y=2x^3+3x^2-12x+27$；

(3) $y=-\frac{1}{3}x^3+x^2-x+\frac{1}{2}$.

2. 可导函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示，试根据图象指出函数 $y=f(x)$ 在各区间上的导数值的正负情况.



（第 2 题图）

3. 利用导数讨论函数 $y=1+\sin x$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 上的单调性.

4. 讨论下列函数的单调性：

(1) $y=x\ln x$；

(2) $y=\frac{x}{\mathrm{e}^x}$.

2.3.2 函数的极值与最值

1. 函数的极值

我们先观察图 2-5 给出的某冲浪运动员在冲浪过程中的一段运动轨迹 $h=h(x)$，其中 h 表示运动员相对海平面的高度，x 表示运动员在水平方向的位移.

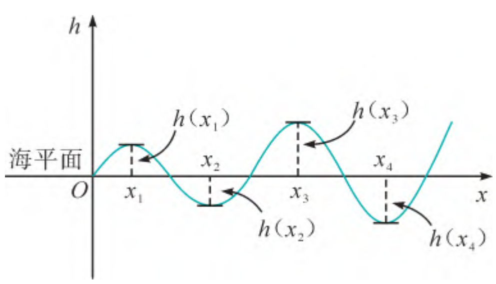


图 2-5

从图 2-5 中不难发现，当该运动员在点 x_1 处时，其相对于海平面的高度 $h(x_1)$ 比点 x_1 附近其他点处相对于海平面的高度都要高——即 $h(x_1)$ 是点 x_1 附近的局部最大值，同样 $h(x_3)$ 也是点 x_3 附近的局部最大值. 当该运动员在点 x_2 处时，其相对于海平面的高度 $h(x_2)$ 比点 x_2 附近其他点处相对于海平面的高度都要低——即 $h(x_2)$ 是点 x_2 附近的局部最小值，同样 $h(x_4)$ 也是点 x_4 附近的局部最小值.

一般地，设函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 及其附近有定义. 如果 $f(x_0)$ 比此函数在 x_0 附近其他点 x 的函数值 $f(x)$ 都大，那么称 $f(x_0)$ 是函数 $y=f(x)$ 的一个**极大值**，极大值就是局部最大值，此时 x_0 称为函数 $y=f(x)$ 的一个**极大值点**. 如果 $f(x_0)$ 比此函数在 x_0 附近其他点 x 的函数值 $f(x)$ 都小，那么称 $f(x_0)$ 是函数 $y=f(x)$ 的一个**极小值**，极小值就是局部最小值，此时 x_0 称为函数 $y=f(x)$ 的一个**极小值点**. 通常，函数的极大值与极小值统称为函数的**极值**，函数的极大值点与极小值点统称为函数的**极值点**.

在图 2-5 中，x_1，x_3 都是函数的极大值点，x_2，x_4 都是函数的极小值点.

通过观察图 2-5 中的函数图象，可以发现：在函数的极大值点的左侧，函数单调递增，即 $f'(x)>0$；在函数的极大值点的右侧，函数单调递减，即 $f'(x)<0$；而在极大值点处切线平行于 x 轴，即导数值为 0.

一般地，对于可导函数 $y=f(x)$，可得如下结论：

(1) 如果 x_0 为函数 $y=f(x)$ 的极值点，那么 $f'(x_0)=0$.

(2) 如果在点 x_0 的左侧附近 $f'(x)>0$，在点 x_0 的右侧附近 $f'(x)<0$，那么点 x_0 为函数 $y=f(x)$ 的极大值点，$f(x_0)$ 为函数 $y=f(x)$ 的一个极大值；如果在点 x_0 的左侧附近 $f'(x)<0$，在点 x_0 的右侧附近 $f'(x)>0$，那么点 x_0 为函数 $y=f(x)$ 的极小值点，$f(x_0)$ 为函数 $y=f(x)$ 的一个极小值.

例1 求函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+1$ 的极值.

解 对函数 $f(x)$ 求导数，得

$$f'(x)=x^2-2x=x(x-2).$$

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=0$，$x_2=2$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大	↘	极小	↗

所以，当 $x=0$ 时，函数 $f(x)$ 有极大值 $f(0)=1$；当 $x=2$时，函数 $f(x)$ 有极小值 $f(2)=-\frac{1}{3}$.（如图 2-6）

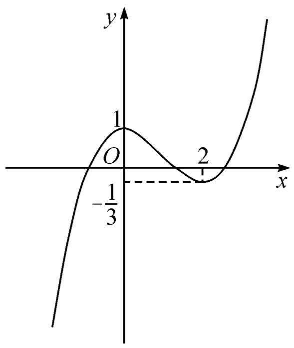


图 2-6

例2 判断函数 $f(x)=x^3+1$ 是否有极值.

解 对函数 $f(x)$ 求导数，得

$$f'(x)=3x^2.$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=0$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗	1	↗

所以，$x=0$ 不是此函数的极值点，此函数无极值，其图象如图 2-7.

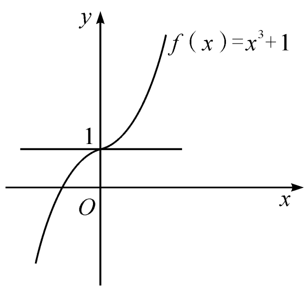


图 2-7

满足 $f'(x_0)=0$ 的点 x_0 通常称为函数 $y=f(x)$ 的驻点，驻点不一定是极值点.

例3 已知 $x=-1$ 和 $x=2$ 都是函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ 的极值点，试求 a，b 的值，并求函数的极大值和极小值.

解 对函数 $f(x)$ 求导数，得 $f'(x)=3x^2+2ax+b$.

因为 $x=-1$ 和 $x=2$ 都是函数的极值点，所以

$$\begin{cases} f'(-1)=-2a+b+3=0, \\ f'(2)=4a+b+12=0. \end{cases}$$

解得 $a=-\dfrac{3}{2}$，$b=-6$. 所以

$$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+1,$$

$$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2).$$

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大	↘	极小	↗

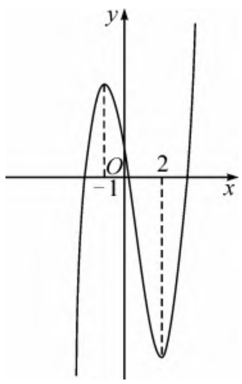


图 2-8

所以，当 $x=-1$ 时，函数有极大值 $f(-1)=\dfrac{9}{2}$；当 $x=2$ 时，函数有极小值 $f(2)=-9$.（如图 2-8）

例 4 求证：$\ln x\leqslant x-1$.

证明 设 $f(x)=\ln x-x+1$，则函数的定义域为 $(0,+\infty)$.

对函数 $f(x)$ 求导数，得

$$f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}.$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=1$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	极大	↘

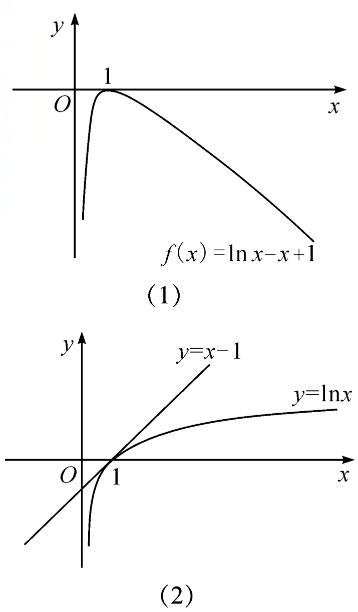


图 2-9

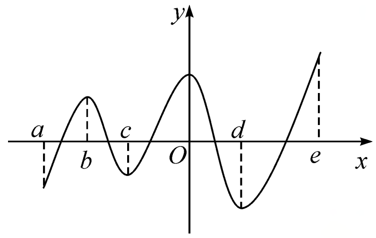
因此，当 $x=1$ 时，函数 $f(x)$ 有极大值 $f(1)=0$（如图 2-9(1)），这个极大值也是函数 $f(x)$ 的最大值，所以 $f(x)=\ln x-x+1\leqslant 0$. 于是

$$\ln x\leqslant x-1,$$

如图 2-9(2).

练习

1. 函数的图象如图所示，指出函数的极大值点和极小值点.
2. 求函数 $f(x)=x^3-x^2-x+1$ 的极值.
3. 设 $x=-1$ 是函数 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2+ax-1$ 的极值点，求 a 的值，并求出此函数的极值.
4. 求证：$e^x \geqslant x+1$.



（第 1 题图）

2. 函数的最大值与最小值

利用导数我们可以求函数的极大值和极小值，函数的极大值和极小值反映的是函数的局部性质，而我们在研究函数的性质时往往更关注：在某个区间上，哪个值最大，哪个值最小？

那么，如何求函数在某个区间上（特别是某个闭区间上）的最大值和最小值呢？

如图 2-10，观察函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象，你能找出函数的最大值点和最小值点吗？

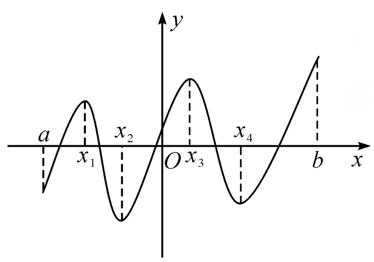


图 2-10

一般地，设函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a, b) 上可导，在闭区间 $[a, b]$ 上连续不断，那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值就是 $y=f(x)$ 在 (a, b) 上的极大值和 $f(a)$，$f(b)$ 中的最大值；$y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值就是 $y=f(x)$ 在 (a, b) 上的极小值和 $f(a)$，$f(b)$ 中的最小值.

在实际计算时，我们只需求出函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 上的导数为 0 点处的函数值和 $f(a)$，$f(b)$，然后比较，即可求出它在 $[a, b]$ 上的最大值和最小值.

例 5 求函数 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x+1$ 在 $[-2, 3]$ 上的最大值和最小值.

解 对函数 $f(x)$ 求导数，得

$$f'(x)=-x^2+x+2$$
$$=-(x+1)(x-2).$$

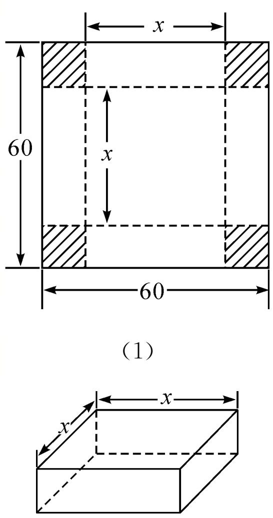
令 $f'(x)=0$，得 $x_1=-1$，$x_2=2$.

因为

$$f(-2)=\frac{5}{3},\ f(-1)=-\frac{1}{6},\ f(2)=\frac{13}{3},\ f(3)=\frac{5}{2}.$$

所以，此函数在$[-2,\ 3]$上的最小值为 $f(-1)=-\dfrac{1}{6}$，最大值为 $f(2)=\dfrac{13}{3}$.

例6 在边长为 60 cm 的正方形铁皮的四角切去相等的正方形，再把它的边沿虚线折起（如图 2-11(1)），做成一个无盖的方底箱子（如图 2-11(2)）. 箱底边长为多少时，箱子容积最大？最大容积是多少？



(1)

(2)

图 2-11

解 设箱底边长为 x，则箱高 $h=\dfrac{60-x}{2}$，箱子的容积

$$V(x)=x^2h=\frac{60x^2-x^3}{2}\quad(0<x<60).$$

对 $V(x)$ 求导数，得

$$V'(x)=60x-\frac{3}{2}x^2=\frac{3}{2}x(40-x).$$

令 $V'(x)=0$，解得 $x_1=0$（舍去），$x_2=40$.

当 x 变化时，$V'(x)$，$V(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,\ 40)$	40	$(40,\ 60)$
$V'(x)$	$+$	0	$-$
$V(x)$	↗	极大	↘

所以，$V(x)$在$(0,\ 60)$上有唯一极大值 $V(40)=16\,000$，从而此极大值就是最大值.

答：当箱底边长为 40 cm 时，箱子的容积最大，最大容积为 16 000 cm^3.

练习

1. 求下列函数在指定区间上的最大值与最小值：

(1) $y=x^3-6x$，$x\in[-1, 3]$；

(2) $y=-x^3+3x^2+2$，$x\in[-2, 2]$.

2. 求函数 $f(x)=\frac{1}{2}x-\sin x$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的最大值和最小值.

3. 设函数 $f(x)=ax^3-3ax^2+b(a<0)$ 在区间 $[1, 4]$ 上有最大值 23，最小值 3，求 a，b 的值.

4. 求证：当 $x\geqslant 0$ 时，$x^3+4\geqslant 3x^2$.

5. 用面积为 60 cm^2 的材料做一个底面是正方形的无盖长方体容器．容器底面边长是多大时，容器的体积最大？最大容积是多少？

习题 2.3

1. 确定下列函数的单调区间：

(1) $y=\frac{2}{3}x^3+x^2-8x$；

(2) $y=(x+1)^2(2-x)$；

(3) $y=x^2e^x$；

(4) $y=\frac{1}{2}x-\cos x \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$.

2. 已知 $a\geqslant 0$，讨论函数 $y=\frac{1}{3}x^3-ax^2-3a^2x+1$ 的单调区间.

3. 证明：当 $x>1$ 时，$e^{x-1}>x$.

4. 求下列函数的极值：

(1) $f(x)=x^2-2x-3$；

(2) $f(x)=2+3x-x^3$.

5. 判断下列函数在给定点处是否有极值．若有极值，是极大值还是极小值？

(1) $f(x)=1+2x^2-x^4$，$x=1$；

(2) $f(x)=\frac{x}{x^2+4}$，$x=\pm 2$；

(3) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+\ln x$，$x=1$.

6. 设函数 $f(x)=-x^3+ax^2+bx$ 在 $x=\pm 1$ 处都有极值，求 a，b 的值，并求出此函数的极值.

7. 求下列函数在给定区间上的最大值和最小值：

(1) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3$，$x\in[-1, 2]$；

(2) $f(x)=x^3-3x+6$，$x\in[-1, 1]$；

(3) $f(x)=x^2+\frac{16}{x}$，$x\in[1, 3]$.

8. 求证：

(1) $\frac{1}{\sqrt{x}}\geqslant-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$；

(2) 当 $x\geqslant 0$ 时，$x^3+32\geqslant 6x^2$.

9. 某食品厂准备做容积一定的圆柱形金属饮料罐，试问：它的高与底面半径应怎样选取，才能使所用材料最省？

阅读与讨论

哪个模型更合理

我们知道，市场上商品的价格对商品的销售收入会产生影响．如果价格高，对于固定的销售量，销售收入就会高；但如果价格太高，可能会使得销售量减少，从而销售收入也减少．如果价格低，对于固定的销售量，销售收入也就会低；但如果价格降低，可能使销售量增加，从而销售收入也增加．

有一家公司想确定某种产品的合适的销售价格，使销售收入达到最大．

设销售收入为 I，单位产品销售价格为 x，销售量为 q．如果销售量固定，那么销售收入是单位产品销售价格的函数

$$I=f(x)=qx.$$

该公司根据多年的销售资料所反映的统计数据，用数理统计的方法分析，得知销售量也是单位产品销售价格的函数，并且可以表示为

$$q(x)=ke^{-\lambda x}\text{(其中 }k\text{，}\lambda\text{ 是两个参数)}.$$

这样，销售收入依然是单位产品销售价格的函数，即

$$I=f(x)=kx\mathrm{e}^{-\lambda x}(x>0).$$

我们考虑如何求销售收入的最大值．可求得 $f(x)$ 的导数为

$$f'(x)=(kx\mathrm{e}^{-\lambda x})'=k\mathrm{e}^{-\lambda x}(1-\lambda x).$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=\dfrac{1}{\lambda}$，可知 $f\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)=\dfrac{k}{\lambda\mathrm{e}}$是 $f(x)$ 的极大值，也就是所求的最大值．

我们再用另一种思路考虑这个问题：如果该公司不是根据多年销售资料所反映的统计数据，并用数理统计的方法分析得出销售量是单位产品销售价格的函数 $q(x)=k\mathrm{e}^{-\lambda x}$，而是简单地根据所谓“薄利多销”的说法，认为销售量与单位产品销售价格成反比例关系，并且用 $q=\dfrac{k}{x}$表示，那么销售收入可以表示为

$$I=f(x)=x\cdot\frac{k}{x}=k,$$

即无论确定怎样的单位产品销售价格，公司的销售收入总是相同的．

以上，我们从两个不同的角度得出了销售收入作为单位产品销售价格的函数

$$I=f(x)=kx\mathrm{e}^{-\lambda x}\quad(x>0)$$

和

$$I=f(x)=k\quad(x>0).$$

实际上，得到这样的函数表达式，是在解决某些实际问题时最为关键的一步．以上的问题告诉我们，采用不同的方法，得到的函数表达式很可能是不同的．这些表达式都是根据经验或过去实践中得到的数据按一些数学方法处理得到的，它们究竟正确与否，最终我们必须在实践中去检验．

讨论题

根据上面的材料，你能否说明其中哪个模型更合理？它能给我们提供什么启示？

复习题

A 组

1. 一质点在运动中的位移 s（单位：m）与时间 t（单位：s）的关系为 $s=10-5t^2$.

（1）求它在时间段 $[1,\ 1+\Delta t]$ 上的平均速度；

（2）求 $t=1$ 时质点的瞬时速度.

2. 在道路施工中，水泥路面的长度常常会因为温度的变化而发生伸长或缩短. 水泥路面在某一温度时的伸缩率常作为衡量道路是否合格的标准之一. 现测得水泥路面的长度 l（单位：km）与温度 t（单位：℃）满足：$l=\dfrac{1}{10\ 000}t^2+7$.

（1）求水泥路面温度在 $[40,\ 40+\Delta t]$ 上的平均伸缩率；

（2）求水泥路面在 $t=40$ 时的伸缩率.

3. 求下列函数的导数：

（1）$y=\dfrac{1}{2}x^2$；　　（2）$y=x+\dfrac{2}{x}$；

（3）$y=(x-1)e^x$；　　（4）$y=\dfrac{x}{\ln x}$；

（5）$y=\ln(2x+1)$；　　（6）$y=x-\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

4. 某海湾的大海水深 d（单位：m）与时间 t（单位：h）的关系是 $d=10+5\cos\dfrac{\pi t}{12}\ (0\leqslant t\leqslant 24)$. 试求 $t=14$ 时海水的上升速度，并解释其实际意义.

5. 求曲线 $y=x+\ln x$ 在点 $(1,\ 1)$ 处的切线方程.

6. 已知直线 $y=7x$ 是曲线 $y=3x^3-2x+a$ 的一条切线，求 a 的值.

7. 求下列函数的单调区间：

（1）$y=x^3-6x+3$；　　（2）$y=2^x-x$；

（3）$y=x^2+\dfrac{2}{x}$；　　（4）$y=-x^2+2\ln x$.

8. 求下列函数的极值：

（1）$y=x^2-\dfrac{2}{3}x^3$；　　（2）$f(x)=x^2-3x+\ln x$.

9. 求下列函数在给定区间上的最大值和最小值：

（1）$y=x^3-x^2+x-1$，$x\in[-1,\ 1]$；

（2）$y=2x^3-15x^2+36x-24$，$x\in[1,\ 4]$.

10.（1）证明：$x\geqslant 0$ 时，$x\geqslant \sin x$；

（2）证明：$e^x\geqslant ex$；

（3）证明：当 $x\geqslant -2$ 时，$x^3+8\geqslant 2x^2+4x$.

11. 某城市在发展过程中，交通状况逐渐受到大家的关注. 有关统计数据显示，从上午 6 时到 9 时车辆通过该市某一路段的用时 y（单位：min）与车辆进入该路段的时刻 t 之间的关系可近似地用如下函数给出：

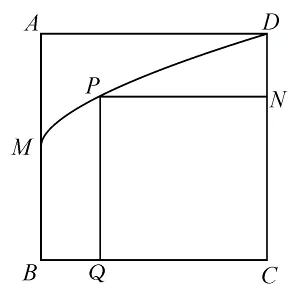
$$y=-\frac{1}{8}t^3-\frac{3}{4}t^2+36t-\frac{629}{4}\quad(6\leqslant t\leqslant 9).$$

试讨论从上午 6 时到 9 时这一时段内车辆通过该路段用时的变化情况，并求出车辆什么时刻进入该路段，通过该路段用时最多.

12. 一周长为 16 cm 的长方形绕其中一边旋转一周形成一个圆柱，当长方形的长和宽各是多少时，旋转形成的圆柱的体积最大？

B 组

1. 已知曲线 E：$y=x^3-6x^2+4x+5$，试求曲线 E 的切线的倾斜角的取值范围.
2. 已知两函数 $y=4x^3$，$y=3x^4+a$ 的图象有公共点，且在公共点处的切线重合，求 a 的值.
3. 求曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=x^3$ 的公共切线的方程.
4. 已知函数 $f(x)=x^2+ax+\ln x$ 有极值，求 a 的取值范围.
5. 扇形的周长为定值 l，当扇形半径和圆心角各为多少时，面积最大？
6. 如图，$ABCD$ 是一块边长为 4 km 的正方形地域，地域内有一条河流 $\overset{\frown}{MD}$，河流经过的路线是一条抛物线，且以 AB 的中点 M 为顶点（河流宽度忽略不计）. 某公司准备在此投资建一个矩形游乐园 $PQCN$（游乐园不能跨越河流）. 试问：如何画边线才能使矩形游乐园的面积最大？并求出最大面积.



（第 6 题图）

思考与实践

1. 搜集实际生活中涉及变化率的案例，并进行总结交流.
2. 搜集、阅读与微积分的创立和发展有关的资料，包括起到重大作用的一些著名历史人物（牛顿、莱布尼茨、柯西、魏尔斯特拉斯等）和事件，采取独立完成或者小组合作的方式，完成一篇有关微积分创立与发展的研究报告.

后　　记

为了全面贯彻党的教育方针，适应时代发展的需要，为学生的终身发展奠定基础，依据《普通高中数学课程标准（2017 年版）》，我们组织专家学者编写了这套普通高中数学教科书.

在本套教科书的编写过程中，我们得到了许多数学教育界前辈、数学课程专家、数学教育理论工作者、中学数学教研员和教师的大力支持和热情帮助，我们对他们的辛勤付出表示衷心的感谢. 我们还要特别感谢华中师范大学数学与统计学学院对本套教科书编写工作的高度重视和大力支持.

本套教科书是全体编写人员集体智慧的结晶. 除已列出的主要编写者外，参加本册教科书编写讨论的还有：彭树德、刘运新、高保中、乔安国、邓勤涛、高云、汪伯林、李建国、龚达晖、田杰、张琴、尹佳等.

我们还要感谢使用本套教科书的师生们，期待你们在使用本套教科书的过程中，及时把意见和建议反馈给我们，以便我们进一步修改完善.

责任编辑 田　杰　尹　佳
封面设计 牛　红　刘静文

普通高中教科书　数学　选择性必修　第二册

出　版	湖北教育出版社	430070　武汉市雄楚大街 268 号
经　销	新　华　书　店	
网　址	http://www.hbedup.com	
印　刷	武汉中远印务有限公司	
开　本	890mm×1240mm　1/16	
印　张	5	
字　数	90 千字	
版　次	2019 年 11 月第 1 版	
印　次	2019 年 11 月第 1 次印刷	
书　号	ISBN 978-7-5564-3145-8	
定　价	5.05 元	